



ИЗСЛЕДВАНЕ НА ДИНАМИЧНОТО ПОВЕДЕНИЕ НА ГРЕДОВА КОНСТРУКЦИЯ С ГЕОМЕТРИЧЕСКА НЕЛИНЕЙНОСТ

INVESTIGATION OF THE DYNAMIC BEHAVIOUR OF BEAM STRUCTURE WITH GEOMETRICAL NONLINEARITY

Йордан Т. Максимов*, Ангел П. Анчев, Велизар Т. Кузманов

Технически университет Габрово

Статията е постъпила на 03 октомври 2014г.; приета за отпечатване на 01 ноември 2014г.

Abstract

The dynamic behaviour of straight cantilever beam has been investigated. The beam is loaded simultaneously of bending and compression, which is a reason for geometrical nonlinearity. A method for dynamic modeling of the beam elastic curve has been applied. The method is based on the idea of separation of the variables (time and metric) before establishing the differential equation of motion by means of prior static modeling of the elastic line shape. The approach has been applied to the device for the experimental determination of the coefficient of sliding friction between the deforming element and the workpiece during the slide diamond burnishing process. The body of the device has been modeled as a cantilever beam with geometric nonlinearity. Between the longitudinal (burnishing force) and transverse (slide friction force) forces exists a correlation defined by Coulomb's law of sliding friction. On this basis, it is obtained an analytical relationship between the deflection and the friction coefficient.

Keywords: Bernoulli-Euler beam, dynamic response, dynamic deflection; slide friction coefficient; diamond burnishing

1. ВЪВЕДЕНИЕ

Геометрическата нелинейност на деформируемо твърдо тяло се изразява в значителна разлика между областите D и D_I , които тялото заема в пространството, съответно в естествено и в еластично равновесие, поради което условията за равновесие се съставят за деформираната геометрия. Частен случай на геометрическа нелинейност на права греда, дори при малки премествания, е когато същата е натоварена едновременно с осова и с напречна сила. За двете сили е неприложим принципът за независимост на действие. За този случай (малки премествания) се приема, че кривината k на еластичната линия се изразява чрез втората производна на провисването w по абсисата x , $k = w''(x)$, тъй като квадратът на наклона на еластичната линия е пренебрежимо малък, $w'^2 \approx 0$. При статично действие на силите уравнението на еластичната линия се получава лесно от решението на обикновено диференциално уравнение [1]. Динамичният проблем се свежда до частно диференциално уравнение, в което функцията на провисването има две променливи – времева и метрична, а решението се основава на метода на Фурие – то е функция, произведение от две функции, всяка от които съдържа само по една променлива. Решението в безкрайни редове се получава лесно за ставно подпряна в двата си края греда, тъй като честотното уравнение, макар и трансцендентно, има аналитично решение [2]. Проблемът се услож-

нява в изчислителен аспект значително при други гранични условия, например запънат край [3].

За инженерни цели, динамичният проблем при конзолна греда натоварена в свободния си край с напречна и надлъжна (осова) сили, може да бъде решен чрез метода разработен в [4] и приложен в [5, 6]. Методът се основава върху идеята за разделяне на променливите, както в метода на Фурие, но това се прави преди съставяне на диференциалното уравнение на движение на еластичната линия. За целта функцията на формата на еластичната линия (нормалната функция) се задава предварително на базата на метода на тригонометричните редове [7].

Пример за гредова конструкция с геометрическа нелинейност, причинена от едновременно огъване и натиск, се съдържа в разработеното от авторите устройство за експериментално определяне на коефициента на триене при плъзгане между деформиращия елемент и заготовката при процеса диамантно заглаждане (фиг. 1). Осовата сила на притискане P_b е един от основните параметри на процеса, а силата на триене при плъзгане T , напречна за конзолната греда, се определя по закона на Кулон: $T = \mu P_b$, където μ е подлежащия на определяне коефициент на триене. Последният зависи от технологичните параметри на процеса диамантно заглаждане: радиус на закръгление r на деформиращия елемент от синтетичен диамант; силата на притискане P_b ; подаването за оборот f по оста на заготовката на де-

* Tel.: 066827312; e-mail: maximov@tugab.bg

формирация елемент; скоростта на плъзгане v между заготовката и деформиращия елемент. Предполага се, че винаги е в сила законът на Кулон. Под действие на двете сили P_b и T , еластичната линия на гредата се изкривява и провисването $w(\xi)$ на сечение с абсиса $x = \xi$ се регистрира от индикатор. Силата P_b се задава посредством винтова пружина с коравина c , а силата T се определя от закона на Кулон. За конкретна двойка P_b и μ , се получава съответно провисване $w(\xi)$. Ако е известна зависимостта $\mu = \mu[w(\xi)]$, то за всяко измерено $w(\xi)$ лесно ще се изчисли коефициентът на триене μ .

Целта на статията е получаване на надеждна зависимост $\mu = \mu[w(\xi)]$.

2. ФИЗИЧЕСКИ МОДЕЛ

На фиг. 1 е показана снимка на устройството (а), схема на работа (б) и гредови модел (в). Обект на динамично моделиране е конзолна греда с дължина L и постоянно напречно сечение с лице F , и с коравина на огъване EJ , натоварена в свободния си край с напречна и с осова сили, с отношение на големините им, равно на μ (фиг. 1в). В свободния край е съсредоточена маса m . Традиционният аналитичен метод за динамичен анализ на греди е основан върху познатото частно диференциално уравнение на еластичната линия от четвърти

ред относно метричната координата и включващо частни производни по времето от първи и втори ред, които отчитат съответно разпределените съпротивителни и инерционни сили. Много често в инженерните приложения еластичната линия на гредата съответства на основния си полутон при свободни и принудени колебания. По тази причина в настоящата работа е използван методът, разработен в [4]:

- Функцията на провисването на еластичната линия се представя като:

$$w(t, x) = \varphi(t) y(x), \quad (1)$$

където $\varphi(t)$ е нормална координата, а $y(x)$ е нормална функция (функция на формата на еластичната линия);

- Нормалната функция се избира предварително така, че да удовлетворява граничните условия, като се използва методът на тригонометричните редове [2, 7];

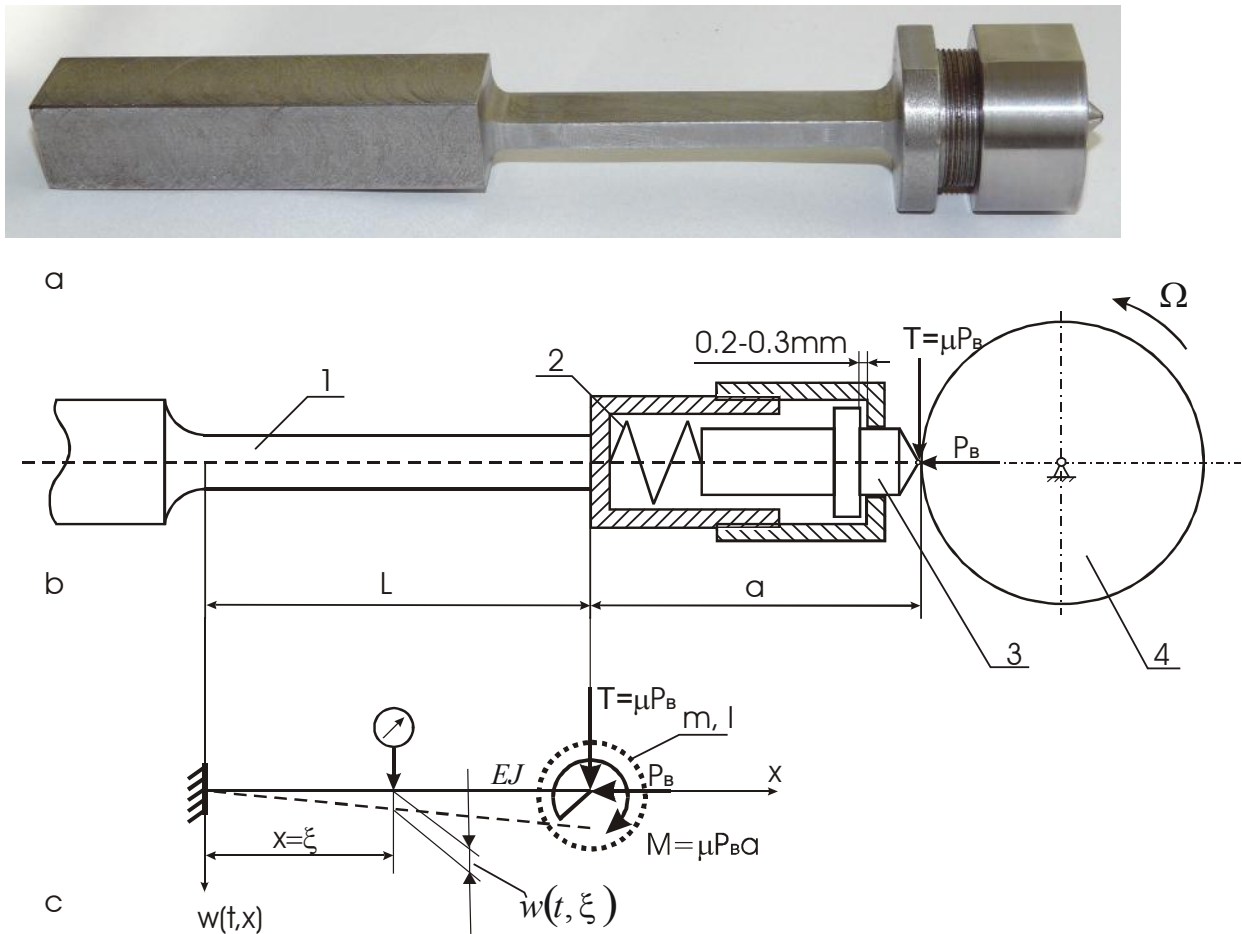
- По този начин се извършва предварително разделяне на променливите и функцията на нормалната координата се определя от решението на обикновено диференциално уравнение.

В случая (фиг. 1в) за нормалната функция е целесъобразно да се избере:

$$y(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2L}, \quad (2)$$

където $x \in (0, L)$.

Тази функция удовлетворява граничните условия: $y(0) = y'(0) = 0$.



Фиг. 1. Устройство и модел: 1 – греда; 2 – пружина; 3 – деформиращ елемент; 4 – заготовка

Освен това в дефиницията за x интервал кривината не сменя знака си, т.е.:

$$y''(x) = \frac{\pi^2}{4L^2} \cos \frac{\pi x}{2L} > 0 \text{ за } \frac{\pi x}{2L} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

3. ДИНАМИЧНО ПОВЕДЕНИЕ

Уравнението на движение на еластичната линия на физическия модел от фиг. 1в се получава от:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = Q_\varphi \quad (3)$$

Кинетичната енергия на E_k е:

$$E_k = E_k^b + E_k^m, \quad (4)$$

където

$$E_k^b = \frac{\rho F}{2} \dot{\varphi}^2 \int_0^L y^2(x) dx = 0.1134 \rho F L \dot{\varphi}^2$$

е кинетична енергия на гредата, ρ е плътност, а $y(x)$ се дефинира от (2),

$$E_k^m = \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{4L^2} I \dot{\varphi}^2 \quad (5)$$

е кинетична енергия на съсредоточената маса, I е масов осов инерционен момент на масата, спрямо ос, определена от абсиса $x = L$ и перпендикулярна на оста на гредата.

Потенциалната енергия на гредата е:

$$E_p = \frac{EJ}{2} \varphi^2 \int_0^L [y''(x)]^2 dx = \frac{EJ\pi^4}{64L^3} \varphi^2. \quad (6)$$

Q_φ е обобщена сила от външния товар: напречна сила $T = \mu P_b$ и осова сила P_b (силите от теглата на гредата и съсредоточената маса се пренебрегват), и се определя чрез принципа на възможните премествания. Задава се нарастване на провисването w , равно на δw , което довежда до изкривяване на еластичната линия

$$\delta w = \delta \varphi y(x) = \delta \varphi \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right)$$

и до ъгъл на наклона;

$$\delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \delta \varphi y'(x) = \delta \varphi \frac{\pi}{2L} \sin \frac{\pi x}{2L}$$

Приложната точка на напречната сила μP_b извършва възможно напречно преместване:

$$\delta w_p = \delta \varphi y(x) \Big|_{x=L} = \delta \varphi \quad (7)$$

Моментът с големина $\mu P_b a$ извършва възможно завъртане

$$\delta \varphi y'(x) \Big|_{x=L} = \delta \varphi \frac{\pi}{2L} \quad (8)$$

Приложната точка на осовата сила P_b извършва осово преместване

$$\Delta L = \frac{1}{2} \int_0^L w'^2(x) dx = \varphi^2 \frac{\pi^2}{16L},$$

а възможното осово преместване е:

$$\frac{\partial \Delta L}{\partial \varphi} \delta \varphi = \frac{\pi^2}{8L} \varphi \delta \varphi \quad (9)$$

Възможното преместване на обобщената сила Q_φ е $\delta \varphi$. Като се вземат предвид зависимости (7)-(9), от уравнението за възможната работа

$$Q_\varphi \delta \varphi = \mu P_b \delta \varphi + \frac{\pi^2}{8L} P_b \varphi \delta \varphi + \frac{\pi a}{2L} \mu P_b \delta \varphi$$

се определя обобщената сила:

$$Q_\varphi = \mu P_b \left(1 + \frac{\pi a}{2L}\right) + \frac{\pi^2}{8L} P_b \varphi \quad (10)$$

В действителност осовата сила P_b се променя незначително в процеса на диамантно заглаждане по две причини:

- отклонение от правилната геометрична форма на заготовката в напречно и надлъжно сечение;
- биене на машинното вретено.

Първата причина има стохастичен характер за конкретна заготовка и не подлежи на аналитичен модел. Втората причина довежда до изменение на P_b по хармоничен закон с честотата Ω на машинното вретено.

Нека биенето на машинното вретено е 2Δ . Тогава P_b може да се представи като:

$$P_b = P_b^n + c \Delta \sin \Omega t,$$

където c е коравина на винтовата пружина.

Достигането на големина на осовата сила от нула до P_b , поради естеството на устройството от фиг. 1, се извършва за време t_p , като се приема линеен закон.

Тогава за P_b следва:

$$P_b = \frac{t}{t_p} \left(P_b^n + c \Delta \sin \Omega t \right) \text{ за } t \in (0, t_p), \quad (11)$$

$$P_b = P_b^n + c \Delta \sin \Omega t \text{ за } t \in (t_p, \infty) \quad (11a)$$

Първо се разглежда динамичното поведение на гредата във времеви интервал $t \in (0, t_p)$.

От (3)-(6), (10) и (11) за диференциалното уравнение на изменение на нормалната координата следва:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2(t) \varphi = K_1 t + K_2 t \sin \Omega t, \quad (12)$$

където:

$$\omega(t) = \sqrt{\frac{EJ\pi^4}{32L^3 m^*} - \frac{\pi^2}{8L m^*} \frac{t}{t_p} \left(P_b^n + c \Delta \sin \Omega t \right)}, \quad (13)$$

$$m^* = 0.2268 \rho F L + m + \frac{\pi^2}{4L^2} I \text{ е приведена маса,}$$

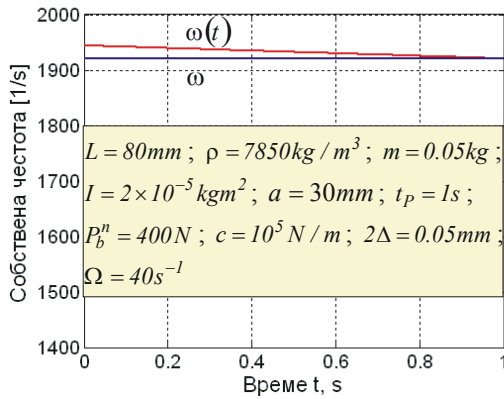
$$K_1 = \mu \left(1 + \frac{\pi a}{2L} \right) \frac{P_b^n}{t_p m^*}, \quad K_2 = \mu \left(1 + \frac{\pi a}{2L} \right) \frac{c \Delta}{t_p m^*}.$$

Функцията $\omega(t)$ е визуализирана на фиг. 2 в интервала $t \in (0, t_p)$ за следните числени данни: напречното сечение на гредата е правоъгълник $12 \times 6 \text{ mm}^2$, дължина $L = 80 \text{ mm}$; $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$; $m = 0.05 \text{ kg}$; $I = 2 \times 10^{-5} \text{ kgm}^2$; $a = 30 \text{ mm}$; $t_p = 1 \text{ s}$; $P_b^n = 400 \text{ N}$; $c = 10^5 \text{ N/m}$; $2\Delta = 0.05 \text{ mm}$; $\Omega = 40 \text{ s}^{-1}$. Поради нез-

начителната промяна на функцията е прието същата да бъде заменена от константата

$$\omega = \sqrt{\frac{EJ\pi^4}{32L^3m^*} - \frac{\pi^2 P_b^n}{8Lm^*}}, \quad (14)$$

т.е. честотният спектър (13) се заменя със собствената честота (14), съответстваща на нормалната функция (2).



Фиг. 2. Графика на функцията $\omega = \omega(t)$

Като се замести (14) в (12), общият интеграл на полученото уравнение с постоянни коефициенти е:

$$\varphi = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t + \eta(t), \quad (15)$$

а частният интеграл $\eta(t)$ се търси по метода на неопределените коефициенти във вида

$$\eta(t) = At + B + (Ct + D)\sin \Omega t + (Gt + H)\cos \Omega t \quad (16)$$

След заместване на (14) и (16) в (12) и приравняване на съответните коефициенти, за неизвестните A, B, C, D, G и H се получава:

$$A = \frac{K_1}{\omega^2}; B = D = G = 0; C = \frac{K_2}{\omega^2 - \Omega^2};$$

$$H = -\frac{2\Omega K_2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2}.$$

Работната смущаваща честота винаги удовлетворява условието $\omega > \Omega$, което се вижда от графиката на фиг. 2 и числените данни, за които е получена, тъй като $\omega = 1920.5s^{-1}$, а $\Omega = 10 \div 100s^{-1}$.

Началните условия са:

$$\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0 \quad (17)$$

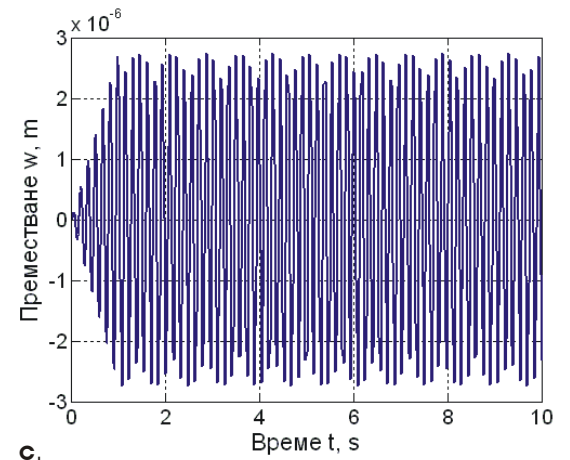
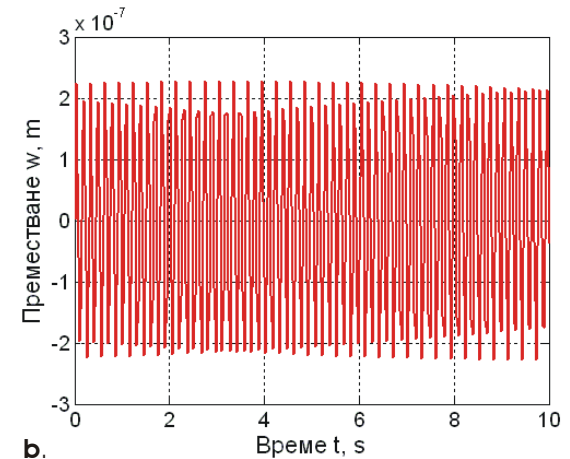
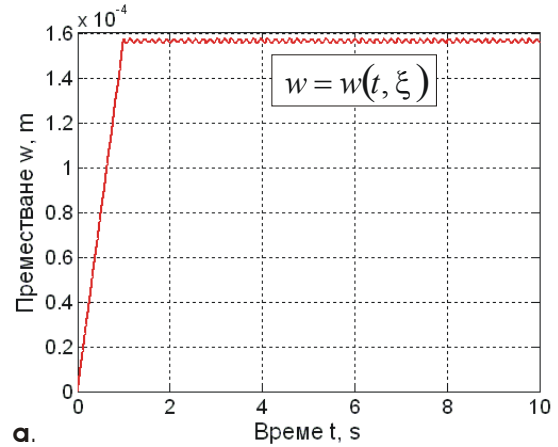
От (15)-(17) за интеграционите константи следва:

$$c_1 = -\frac{K_1}{\omega^3}; c_2 = \frac{2\Omega K_2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2}. \quad (18)$$

Окончателно, от (1), (2), (15), (16) и (18) за функция-та на динамичното провисване следва:

$$\begin{aligned} w(t, x) = & \left[-\frac{K_1}{\omega^3} \sin \omega t + \frac{2\Omega K_2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2} \cos \omega t + \right. \\ & \left. + \frac{K_1 t_p}{\omega^2} + \frac{K_2}{\omega^2 - \Omega^2} t \sin \Omega t - \frac{2\Omega K_2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2} \cos \Omega t \right] \times \\ & \times \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

за $t \in (0, t_p)$, и



Фиг. 3. Провисване на сечение с абциса $x = \xi = 60mm$ във функция от времето: а. резултатно провисване; б. провисване от колебание със собствена честота, съответстваща на форма, дефинирана от (2); в. провисване от принудени колебания

$$\begin{aligned} w(t, x) = & \left[-\frac{K_1}{\omega^3} \sin \omega t + \frac{2\Omega K_2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2} \cos \omega t + \right. \\ & \left. + \frac{K_1 t_p}{\omega^2} + \frac{K_2 t_p}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t - \frac{2\Omega K_2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2} \cos \Omega t \right] \times \\ & \times \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

за $t \in (t_p, \infty)$.

4. ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ФУНКЦИЯТА $\mu = \mu[w(\xi)]$

На фиг. 3 е показана визуализация на (19) и (20) за $x = \xi = 60mm$. Амплитудите на свободните колебания (фиг. 3b) и на принудените колебания (фиг. 3c) са съответно с три и с два порядъка по-малки от провисването (фиг. 3a), причинено от номиналната големина на P_b във времеви интервал $t \in (t_p, \infty)$. Освен това в действителност собствените колебания бързо затихват, най-вече поради материален хистерезис и разсейване на енергията в мястото на закрепване на гредата. Следователно, с достатъчна за инженерната практика точност може да се работи със статичното провисване, което се получава като в (20) се пренебрегнат кръговите функции:

$$w(x) = \frac{K_1 t_p}{\omega_2} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right)$$

Като се вземе предвид (14) и изразът за K_1 , за провисването на произволно сечение с абсциса $x = \xi$ се получава:

$$w(\xi) = \frac{32\mu \left(1 + \frac{\pi a}{2L} \right) P_b^n L^3}{EJ\pi^4 - 4\pi^2 L^2 P_b^n} \left(1 - \cos \frac{\pi \xi}{2L} \right). \quad (21)$$

За търсената зависимост $\mu = \mu[w(\xi)]$ следва:

$$\mu = \varphi(P_b^n) w(\xi), \quad (22)$$

където:

$$\varphi(P_b^n) = \frac{EJ\pi^4 - 4\pi^2 L^2 P_b^n}{32 \left(1 + \frac{\pi a}{2L} \right) P_b^n L^3 \left(1 - \cos \frac{\pi \xi}{2L} \right)}. \quad (23)$$

Знаменателят на (21) винаги е по-голям от нула, тъй като

$$P_b^n \ll P_{b,cr}^n = \frac{EJ\pi^2}{(2L)^2},$$

където $P_{b,cr}^n$ е познатата критична сила на Euler за първи случай на закрепване.

5. ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ПРОВЕРКА

На зависимостта на провисването $w(\xi)$ от напречна сила T (виж фиг. 1b) е направена експериментална проверка. Аналитичният вид на тази зависимост се получава от (21) след полагане на $\mu P_b^n = T$:

$$w(\xi) = kT, \quad (24)$$

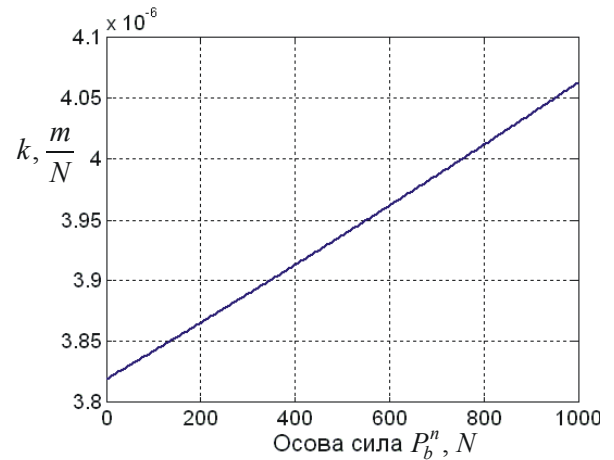
където:

$$k = \frac{32 \left(1 + \frac{\pi a}{2L} \right) L^3}{EJ\pi^4 - 4\pi^2 L^2 P_b^n} \left(1 - \cos \frac{\pi \xi}{2L} \right) \quad (25)$$

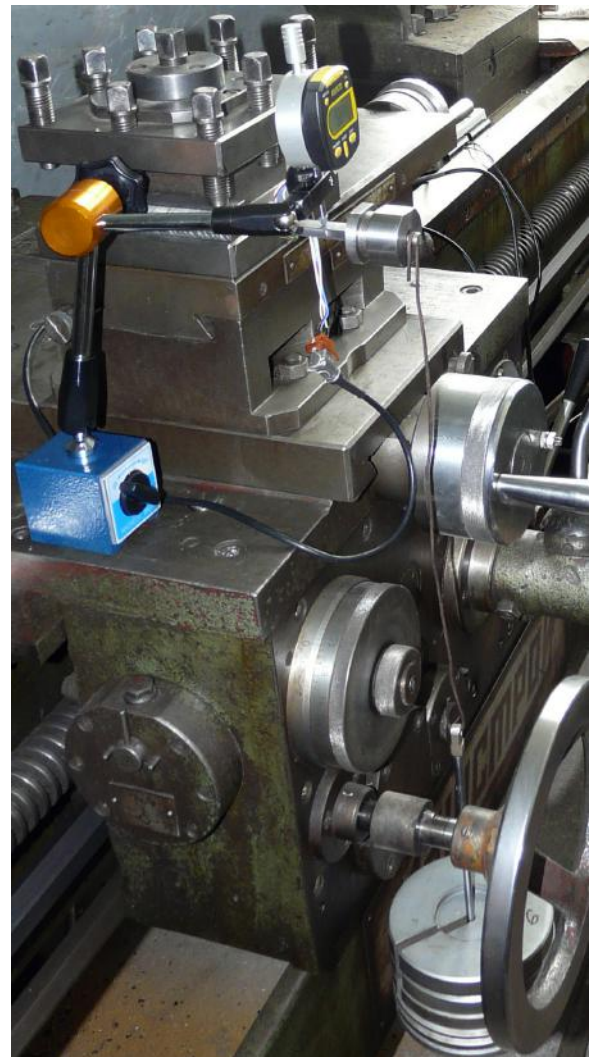
На фиг. 4 е показана графика на зависимостта $k = k(P_b^n)$, с числените данни от раздел 3. Очевидно внасяната от P_b^n геометрическа нелинейност е незначителна.

Установката за експериментално определяне на зависимостта $w(\xi) = f(T)$ е показана на фиг. 5, а на фиг. 6 са

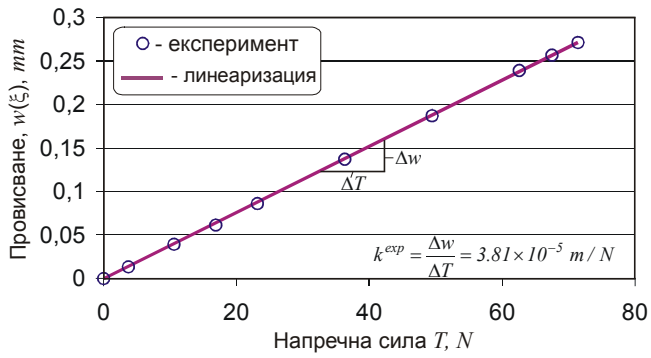
показани експерименталните резултати. Сравнението за k се извършва за $P_b^n = 0$ - от фиг. 4 се отчита значението на функцията за $k(P_b^n)_{P_b^n=0}$, тъй като експерименталният тест е извършен без наличие на осова сила.



Фиг. 4. Графика на зависимостта $k = k(P_b^n)$



Фиг. 5. Експериментално определяне на зависимостта $w(\xi) = f(T)$



Фиг. 6. Експериментални резултати

От фиг. 6 за ъгловият коефициент на правата е получено $k^{exp} = 3.81 \times 10^{-6} \text{ m / N}$, а от фиг. 4 за $k(P_b^n)_{P_b^n=0}$ е отчетено $3.825 \times 10^{-6} \text{ m / N}$. Полученият резултат дава основание формула (25), респ. графиката на фиг. 4, да се приеме за достоверна и надеждна, което означава,

че формули (22) и (23) за определяне на коефициента на триене са достоверни и надеждни.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Максимов Й. Т. Съпротивление на материалите. ЕксПрес, Габрово, 2009.
 [2] Тимошенко С. П. Курс теорий упругости. „Наукова думка”, Киев, 1972.
 [3] Феодосьев В. И. Соппротивление материалов. М., 1963
 [4] Maximov J. T. A new approach to modeling the dynamic response of Bernoulli-Euler beam under moving load. Coupled Systems Mechanics 3(3) (2014) 247-265.
 [5] Дунчев В. П., Максимов Й. Т. Трепене на греда на Bernoulli-Euler с еластични ъглови опори под действие на преминаващ товар. Механика на машините 105 (2014) 17-24
 [6] Дунчев В. П., Максимов Й. Т. Известия на Технически университет Габрово 48 (2014) 3-8.
 [7] Максимов Й. Т., Дунчев В. П. Приложение на тригонометрични редове за моделиране на еластичната линия на права двуподпорна греда с ъглови еластични връзки. Известия на Технически университет Габрово 45 (2013) 11-16.