



**Раздел 1**  
**ПРИЛОЖНА МЕХАНИКА**

**Section 1**  
**APPLIED MECHANICS**

**ДИНАМИЧНО ПОВЕДЕНИЕ НА СИСТЕМАТА „ГЛАВНА ГРЕДА – ТЕЛФЕР – ТОВАР”**  
**СЛЕДСТВИЕ ДВИЖЕНИЕ НА ТЕЛФЕРА**

**DYNAMIC BEHAVIOR OF THE SYSTEM “PRINCIPAL BEAM – TELPHER – LOAD” DUE**  
**TO TELPHER MOTION**

**Владимир П. Дунчев\*** **Йордан Т. Максимов**

*Технически университет – Габрово, катедра Техническа механика*

Статията е постъпила на 22 юли 2014г.; приета за отпечатване на 05 септември 2014г.

**Abstract**

*This article presents the results from an analytical study of the dynamic behaviour of the metal structure of a bridge crane due to the movement of the electric hoist. The modeled system includes: the principal beam of the crane; moving with a constant horizontal velocity hoist; elastically fixed to the hoist load. The forced vibrations with its own frequency and with forced frequency, due to the movement of the hoist, have been analyzed. A concept of "dynamic coefficient" has been introduced, which is a ratio of the dynamic deflection of the principal beam to the static one. This ratio has been compared with the known from the literature empirical coefficient of dynamism during the hoist movement, due to unevenness the track.*

**Keywords:** bridge crane, dynamical behaviour, forced vibrations, dynamical deflection, dynamical coefficient.

**1. ВЪВЕДЕНИЕ**

Наличието на подвижен товар е причина за възникване на вибрации в инженерни съоръжения, като мостове, железопътни релси, мостови кранове и др. Изчислителната схема на тези обекти най-често е гредови модел, натоварен с движещ се товар. На тази основа в литературата са показани решения на редица моделни задачи. Възникването на този инженерен проблем е провокирано от строежа и експлоатацията на железопътни съоръжения. Три изследвания поставят началото на решение на този проблем. Първият математичен модел на еластичната линия на права греда на Bernoulli – Euler, натоварена с движещ се с постоянна скорост товар, е получен от R. Willis (1849) за случая на ставно закрепени краища. Масата на гредата е пренебрегната и системата „греда – подвижен товар” е сведена до такава с една степен на свобода, имаща постоянна маса и променлива еластичност. Противоположният модел на еластичната линия на греда със ставни краища под действие на подвижен товар е когато се отчита само разпределената маса на гредата. Аналитично решение на този проблем е получен от Крилов (1905) за случая на подвижна сила с постоянна големина. Аналитично решение за случая на хармонична смущаваща сила е предложено от Тимошенко (1922). Подробна библиографска справка за

редица решения на модела „греда-движещ се товар” е показана в (Maximov, 2014). Решение на модела „греда с еластични ъглови опори – подвижен товар” е показано в (Дунчев и Максимов, 2013). В тази работа е развит инженерен подход за изследване на принудените колебания на греда на Bernoulli – Euler с наложени еластични ъглови връзки, които са причинени от хоризонталната скорост на движещ се товар. Изследвано е поведението на гредата при резонанс и е анализирано влиянието на масата на товара върху принудените колебания.

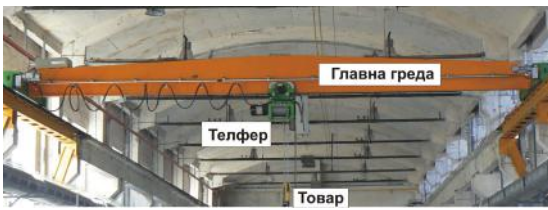
Съществуват техническите решения на закрепване, които препологат ъглова еластичност на краищата на гредата. Например такъв е случаят на закрепване на главната греда на мостов кран, когато същата е закрепена посредством плоча и фланцови съединения за челните греди. Еластичността на ъгловите връзки в двата края на главната греда се предопределя от коравината на усукване на челните греди. Движението се по главната греда телфер с еластично окачен товар представлява подвижния товар. Тази система („главна греда – телфер – товар”) излиза от рамката на познатите моделни задачи, тъй като предполага две обобщени координати: провисването на еластичната линия (зависещо от времето и абцисата, дефинираща конкретно сечение) и еластичното удължение на връзката „телфер-товар”. В из-

\* Тел.: 066827306; e-mail: vladimir\_dunchev@abv.bg

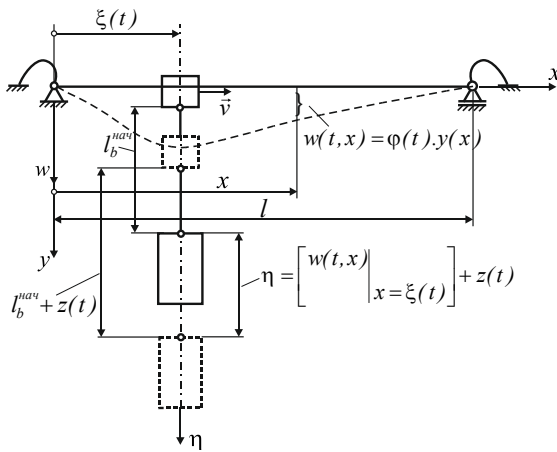
вестните методики за якостно и деформационно измеряване на главната греда на мостов кран динамичният ефект от движещия се телфер с еластично окачен товар се отчита с коефициент на динамичност, който е емпирична функция на номиналната скорост на телфера (Коларов и др., 1986). Този динамичен коефициент отчита неравности (които, разбира се, имат стохастичен характер) по трасето на телфера, които от своя страна са причина за динамично натоварване. Същевременно, подвижният товар (телфер с еластично окачен товар) причинява принудени колебания на главната греда, които се наслаждат към колебанията със собствена честота, следствие на случайни (недетерминирани) въздействия от неравности по трасето. И докато вторите бързо затихват поради материален хистерезис най-вече, принудените колебания съществуват през цялото време на движение на телфера.

Целта на настоящото изследване е да се оценят количествено принудените колебания на системата „главна греда – телфер – товар“ следствие движение на телфера, респ. динамичният ефект върху главната греда на мостов кран.

## 2. ИЗЧИСЛИТЕЛНА СХЕМА НА СИСТЕМАТА „ГЛАВНА ГРЕДА – ТЕЛФЕР – ТОВАР“



а.



б.

Фиг. 1. Система „главна греда-телфер-товар“:  
а. реален обект; б. изчислителна схема

Показана е на фиг. 1. Системата е с две степени на свобода. За представяне на първата обобщена координата – провисването  $w(t, x)$  на еластичната линия на гредата - е използван подхода, развит в (Максимов и Дунчев, 2013) и приложен в (Дунчев и Максимов, 2013):

$$w(t, x) = \varphi(t)y(x) \quad (1)$$

където  $\varphi(t)$  е нормална координата, а  $y(x)$  е нормална функция:

$$y(x) = \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right) + \frac{k\pi}{l} \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (2)$$

$$k = \frac{16EJ}{\ell c_\varphi}, \quad (3)$$

$EJ$  и  $\ell$  са съответно коравина на огъване и дължина на гредата;  $c_\varphi$  е коравина на еластичните ъглови връзки.

Втората обобщена координата  $z(t)$  отчита еластичното удължение на въжето, за края на което е закрепен товара.

## 3. ОГЪВНИ КОЛЕБАНИЯ НА ГЛАВНАТА ГРЕДА, ПРИЧИНЕНИ ОТ ДВИЖЕЩИЯ СЕ ТЕЛФЕР

Уравненията на движение на системата «главна греда – телфер – товар» са:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial}{\partial \varphi} (E_k - E_p) &= Q_\varphi \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial}{\partial z} (E_k - E_p) &= Q_z \\ \xi &= vt \end{aligned} \quad (4)$$

където:

$$E_k = E_k^{zp} + E_k^{mel} + E_k^{mos} \quad (5)$$

е кинетична енергия на системата:  $E_k^{zp}$ ,  $E_k^{mel}$  и  $E_k^{mos}$  са съответно кинетични енергии на гредата, телфера и товара (кинетичната енергия на въжето е пренебрегната);  $E_p$  е потенциална енергия на системата;  $Q_\varphi$  и  $Q_z$  са обобщени сили;  $\bar{v}$  е хоризонтална скорост на телфера,  $v = const$ ;  $\xi$  е координата по оста на гредата, отчитаща положението на телфера.

Кинетичната енергия на гредата е (Дунчев и Максимов, 2013):

$$E_k^{zp} = \frac{l}{2} \bar{M}^{zp} \dot{\varphi}^2, \quad (6)$$

където

$$\bar{M}^{zp} = \rho F l \left( \frac{3}{2} + \frac{4}{3} k + \frac{\pi^2 k^2}{32} \right) \quad (7)$$

е приведена маса на гредата,  $\rho$  е плътност,  $F$  е площ на напречното сечение.

Кинетичните енергии на телфера и товара се получават само от съответните им вертикални скорости. Хоризонталните им скорости (като големина) са равни на  $\dot{\xi}(t) = v$ . Те не се включват в изразите за кинетичната енергия, тъй като законът на движение  $\xi = \xi(t)$  е известен. Хоризонталната скорост на товара от евентуалното му разлюляване във вертикална равнина, съдържаща оста на гредата, се пренебрегва, тъй като този процес има стохастичен характер.

Кинетичната енергия на телфера е:

$$E_k^{mel} = \frac{l}{2} m^{mel} F^2(t) \dot{\varphi}^2, \quad (8)$$

където  $m^{mel}$  е масата на телфера, а

$$F(t) = y(x) \Big|_{x=vt} = 1 - \cos \frac{2\pi vt}{l} + \frac{k\pi}{4} \sin \frac{\pi vt}{l} \quad (9)$$

Кинетичната енергия на товара е:

$$E_k^{mos} = \frac{l}{2} M^{mos} v_{mos}^2, \quad (10)$$

където  $M^{mos}$  е масата на товара, а  $\bar{v}_{mos}$  е вертикалната му скорост при постоянна начална дължина  $l_g^{нач}$  на въ-

жето, т.е. от напречното провисване на гредата и от удължението на въжето.

За  $v_{moe}$  следва:

$$v_{moe} = \dot{\eta} = F(t)\dot{\varphi}(t) + \dot{z}(t) \quad (11)$$

След заместване на (11) в (10):

$$E_k^{moe} = \frac{1}{2} M^{moe} \left[ F^2(t)\dot{\varphi}^2 + 2F(t)\dot{\varphi}\dot{z} + \dot{z}^2 \right] \quad (12)$$

Функцията (9) превръща (4) в система нелинейни диференциални уравнения, която практически може да бъде решена само числено. В настоящото изследване  $F(t)$  е заменена от средно интегралната ѝ стойност:

$$\bar{F} = \frac{v}{l} \int_0^v F(t) dt = l + \frac{k}{2} \quad (13)$$

По този начин (4) се апроксимира със система линейни диференциални уравнения от втори ред, която има аналитично решение, и същевременно се въвежда известна грешка: когато телферът е около средата на гредата изчислените собствени честоти ще са по-големи от действителните и обратно.

Потенциалната енергия на системата е:

$$E_p = E_p^{zp} + E_p^{el.вр} + E_p^{въжсе}, \quad (14)$$

където  $E_p^{zp}$ ,  $E_p^{el.вр}$  и  $E_p^{въжсе}$  са съответно компоненти от гредата, еластичните връзки и въжето.

Сумата от първите две компоненти е (Дунчев и Максимов, 2013):

$$E_p^{zp} + E_p^{el.вр} = \frac{EJ\pi^4}{l^3} \left( 4 + \frac{5}{3}k + \frac{\pi^2 k^2}{64} \right) \varphi^2 \quad (15)$$

Потенциалната енергия на въжето е:

$$E_p^{въжсе} = \frac{1}{2} c^{въжсе} z^2, \quad (16)$$

където  $c^{въжсе}$  е коравина на въжето ( $I_g^{нач.} = const$ ).

Външните потенциални сили на системата са:  $Q_{moe}$  - тегло на товара;  $q = \rho Fg$  - разпределен товар от теглото на гредата, където  $\bar{g}$  е земното ускорение;  $G^{mel}$  - тегло на телфера. Задава се нарастване на провисването  $w$ , равно на  $\delta w$ , което довежда до изкривяване на еластичната линия (координатата  $z$  остава постоянна):

$$\delta w = \delta \varphi \cdot y(x) \quad (17)$$

Приложните точки на силите  $G^{mel}$  и  $Q_{moe}$  извършват премествания съответно:

$$\delta w_{G^{mel}} = \delta w_{Q_{moe}} = \delta \varphi \cdot F(t) \quad (18)$$

Възможната работа на силите  $G^{mel}$  и  $Q_{moe}$ , и на разпределения товар са съответно:

$$\delta A(G^{mel} + Q_{moe}) = (G^{mel} + Q_{moe}) F(t) \cdot \delta \varphi \quad (19)$$

$$\delta A(q) = \int_0^l q \delta w dx = ql \left( 1 + \frac{k}{2} \right) \delta \varphi \quad (20)$$

Възможната работа на обобщената сила  $Q_\varphi$  е:

$$\delta A(Q_\varphi) = Q_\varphi \cdot \delta \varphi \quad (21)$$

От (19) – (21) за  $Q_\varphi$  съгласно принципа на възможните премествания следва:

$$Q_\varphi = (G^{mel} + Q_{moe}) F(t) + ql \left( 1 + \frac{k}{2} \right) \quad (22)$$

Задава се възможно нарастване  $\delta z$  на координатата  $z$  ( $\varphi$  остава неизменяема). Възможната работа на силата  $Q_{moe}$  е:

$$\delta A(Q_{moe}) = Q_{moe} \delta z \quad (23)$$

Възможна работа на обобщената сила  $Q_z$  е:

$$\delta A(Q_z) = Q_z \delta z \quad (24)$$

От (23) и (24) следва:

$$Q_z = Q_{moe} \quad (25)$$

След заместване на (25), (22), (14)-(16), (13), (12), (8), (6) и (5) в (4), за диференциалните уравнения на движението на системата „гредата – телфер – товар“ се получава:

$$\begin{cases} \bar{M}_\varphi \ddot{\varphi} + \bar{M}_z \ddot{z} + A_\varphi \varphi = F(t) Q_\Sigma + G_\Sigma \\ M^{moe} \ddot{\varphi} + M^{moe} \ddot{z} + c^{въжсе} z = Q_{moe} \end{cases} \quad (26)$$

където:

$$\bar{M}_\varphi = \bar{M}^{zp} + m^{mel} \cdot \bar{F}^2 + M^{moe} \bar{F}^2,$$

$$\bar{M}_z = M^{moe} \bar{F},$$

$$A_\varphi = \frac{2EJ\pi^4}{l^3} \left( 4 + \frac{5}{3}k + \frac{\pi^2 k^2}{64} \right),$$

$$Q_\Sigma = G^{mel} + Q_{moe},$$

$$G_\Sigma = ql \left( 1 + \frac{k}{2} \right).$$

От системата (26), посредством почленно събиране, първо се елиминира  $\ddot{\varphi}$ , след това  $\ddot{z}$ , и системата добива вида:

$$\begin{cases} \left( 1 - \frac{\bar{M}_z}{\bar{M}_\varphi} \right) \ddot{z} - \frac{A_\varphi}{M_\varphi} \varphi + \frac{z}{d} = g - F(t) \frac{Q_\Sigma}{\bar{M}_\varphi} - \frac{G_\Sigma}{\bar{M}_\varphi} \\ \left( \frac{\bar{M}_\varphi}{\bar{M}_z} - 1 \right) \ddot{\varphi} + \frac{A_\varphi}{\bar{M}_z} \varphi - \frac{z}{d} = F(t) \frac{Q_\Sigma}{\bar{M}_z} + \frac{G_\Sigma}{\bar{M}_z} - g \end{cases} \quad (27)$$

където:  $d = \frac{M^{moe}}{c^{въжсе}}$  е реципрочна стойност на квадрата на собствената честота на системата „въже – товар“.

След почленно събиране на уравненията (27):

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\bar{M}_\varphi}{\bar{M}_z} - 1 \right) \ddot{\varphi} + \left( 1 - \frac{\bar{M}_z}{\bar{M}_\varphi} \right) \ddot{z} + A_\varphi \left( \frac{1}{\bar{M}_z} - \frac{1}{\bar{M}_\varphi} \right) \varphi = \\ & = [F(t) Q_\Sigma + G_\Sigma] \left[ \frac{1}{\bar{M}_z} - \frac{1}{\bar{M}_\varphi} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

Двете страни на второто от уравнения (27) се диференцират двукратно по времето  $t$  и се решава по отношение на  $\ddot{z}$ :

$$\ddot{z} = d \left( \frac{\bar{M}_\varphi}{\bar{M}_z} - 1 \right) \frac{d^4 \varphi}{dt^4} + d \frac{A_\varphi}{\bar{M}_z} \ddot{\varphi} - \ddot{F}(t) \frac{Q_\Sigma}{\bar{M}_z} \cdot d \quad (29)$$

След заместване на (29) в (28) се получава диференциалното уравнение на нормалната координата  $\varphi(t)$ :

$$\frac{d^4 \varphi}{dt^4} + 2ab \ddot{\varphi} + ac \varphi = F(t) a Q_\Sigma + a G_\Sigma + ad Q_\Sigma \ddot{F}(t), \quad (30)$$

където:

$$a = \frac{1}{(\bar{M}_\varphi - \bar{M}_z) d}; \quad 2b = \bar{M}_\varphi + A_\varphi d; \quad c = A_\varphi.$$

Корените на характеристичното уравнение са:

$$r_{1,2} = \pm i\sqrt{ab - \sqrt{a^2 b^2 - ac}}$$

$$r_{3,4} = \pm i\sqrt{ab + \sqrt{a^2 b^2 - ac}}$$

За физически приемливи стойности на параметрите на механичната система „главна греда – телфер – товар“ винаги

$$ab^2 - c > 0.$$

Полага се:

$$ab - \sqrt{a^2 b^2 - ac} = \omega_1^2$$

$$ab + \sqrt{a^2 b^2 - ac} = \omega_2^2 \quad (31)$$

Общият интеграл на нехомогенното диференциално уравнение (32) е:

$$\varphi = C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t + C_3 \cos \omega_2 t + C_4 \sin \omega_2 t + \varphi_1(t) \quad (32)$$

където частния интеграл  $\varphi_1(t)$  е намерен във вида:

$$\varphi_1(t) = A_1 + A_2 \cos 2\Omega t + A_3 \sin \Omega t, \quad (33)$$

$\Omega = \frac{\pi v}{l}$ , е смущаващата честота от движещия се товар,

а константите  $A_i$  са:

$$A_1 = \frac{Q_\Sigma + G_\Sigma}{c};$$

$$A_2 = \frac{aQ_\Sigma \left(1 - 4\frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)}{16\Omega^4 - 8ab\Omega^2 + ac};$$

$$A_3 = \frac{aQ_\Sigma \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)}{\Omega^4 - 2ab\Omega^2 + ac};$$

$$\omega_1^2 = \frac{l}{d}.$$

За да се намерят интеграционните константи  $C_i, i=1,2,3,4$ , в общия интеграл (32), второто от уравнения (27) се решава спрямо  $z$ :

$$z = \frac{\bar{m}}{\omega_1^2} \ddot{\varphi} + \frac{\bar{c}}{\omega_1^2} \dot{\varphi} - F(t) \frac{Q_\Sigma}{M_z \omega_1^2} - \frac{G_\Sigma - \bar{M}_z g}{M_z \omega_1^2} \quad (34)$$

и се намира първият му интеграл:

$$\dot{z} = \frac{\bar{m}}{\omega_1^2} \dot{\varphi} + \frac{\bar{c}}{\omega_1^2} \varphi - \dot{F}(t) \frac{Q_\Sigma}{M_z \omega_1^2}, \quad (35)$$

където:  $\bar{m} = \frac{\bar{M}_\varphi}{M_z} - 1, \bar{c} = \frac{A_\varphi}{M_z}$ .

Приема се, че в началния момент ( $t=0$ ) телферът (фиг.1б) е над лявата опора. Тогава началните условия са:

$$\varphi(0) = 0$$

$$\dot{\varphi}(0) = 0$$

$$z(0) = \frac{Q^{mov}}{c^{въжсе}} = \frac{g}{\omega_1^2} \quad (36)$$

$$\dot{z}(0) = 0$$

От (32) и (34)-(36) за интеграционните константи  $C_i$  следва:

$$C_1 = \frac{-A_1 \bar{m} \omega_2^2 - A_2 \bar{m} (\omega_2^2 - 4\Omega^2) + \frac{G_\Sigma - \bar{M}_z g}{M_z} + \frac{\omega_1^2 Q^{mov}}{c^{въжсе}}}{\bar{m} (\omega_2^2 - \omega_1^2)}, \quad (37)$$

$$C_2 = \frac{-A_3 \bar{m} \Omega (\omega_2^2 - \Omega^2) + \frac{k\pi \Omega Q_\Sigma}{4M_z}}{(\omega_2^2 - \omega_1^2) \bar{m} \omega_2}, \quad (38)$$

$$C_3 = \frac{A_1 \bar{m} \omega_1^2 + A_2 \bar{m} (\omega_1^2 - 4\Omega^2) + \frac{G_\Sigma - \bar{M}_z g}{M_z} + \frac{\omega_1^2 Q^{mov}}{c^{въжсе}}}{\bar{m} (\omega_2^2 - \omega_1^2)}, \quad (39)$$

$$C_4 = \frac{A_3 \bar{m} \Omega (\omega_1^2 - \Omega^2) - \frac{k\pi \Omega Q_\Sigma}{4M_z}}{(\omega_2^2 - \omega_1^2) \bar{m} \omega_2}. \quad (40)$$

Константите  $C_1$  и  $C_3$  се представят като:

$$C_i = C_i^{free} + C_i^{forced}, \quad i=1,3, \quad (41)$$

където:

$$C_i^{free} = \frac{\omega_1^2 Q^{mov}}{c^{въжсе} \bar{m} (\omega_2^2 - \omega_1^2)} = \frac{g}{\bar{m} (\omega_2^2 - \omega_1^2)}, \quad (42)$$

$$C_1^{forced} = \frac{-A_1 \bar{m} \omega_2^2 - A_2 \bar{m} (\omega_2^2 - 4\Omega^2) + \frac{G_\Sigma - \bar{M}_z g}{M_z}}{\bar{m} (\omega_2^2 - \omega_1^2)}, \quad (43)$$

$$C_3^{forced} = \frac{A_1 \bar{m} \omega_1^2 + A_2 \bar{m} (\omega_1^2 - 4\Omega^2) - \frac{G_\Sigma - \bar{M}_z g}{M_z}}{\bar{m} (\omega_2^2 - \omega_1^2)}. \quad (44)$$

Компонентите  $C_i^{free}, i=1,3$ , дефинират амплитуди на свободни колебания на материалната система, които колебания са причинени от началните условия – третото от (36). Тези колебания бързо затихват, най-вече поради материален хистерезис. Компонентите  $C_i^{forced}, i=1,3$ , дефинират амплитудите на свободните колебания, които са причинени от хоризонталната скорост на подвижния товар.

От (1), (32), (33), (38), (40), (43) и (44) за огъвните колебания на главната греда, причинени от движещия се телфер с товар, следва:

$$w(t, x) = \left( \begin{aligned} &C_1^{forced} \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t + \\ &+ C_3^{forced} \cos \omega_2 t + C_4 \sin \omega_2 t + \\ &+ A_1 + A_2 \cos 2\Omega t + A_3 \sin \Omega t \end{aligned} \right) \times \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} + \frac{k\pi}{4} \sin \frac{\pi x}{l} \right) \quad (45)$$

Принудените колебания (45) на системата „главна греда – телфер – товар“ са суперпозиция от колебания със собствени честоти  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , и смущаващата честота  $\Omega$ , зависеща от скоростта на телфера и от дължината на гредата.

Статичното провисване  $w(x)$  се получава от аналогична на (1) зависимост:

$$w(x) = \varphi_{st} \cdot y(x), \quad (46)$$

където  $\varphi_{st}$  се получава от първото уравнение на (26) след полагане на  $\ddot{\varphi} = \ddot{z} = 0$ , заместване на  $F(t)$  с  $y(x)$  и решаване по отношение на  $\varphi$ :

$$\varphi_{st} = \frac{Q_{\Sigma}y(x) + G_{\Sigma}}{A_{\varphi}} \quad (47)$$

Динамичният ефект от движение на телфера, който ефект трябва да се вземе предвид при оразмеряване на главната греда, е целесъобразно да се оцени посредством коефициент на динамичност  $k_d$ . Последният може да се дефинира като отношение на динамичното провисване (45) към статичното такова (46):

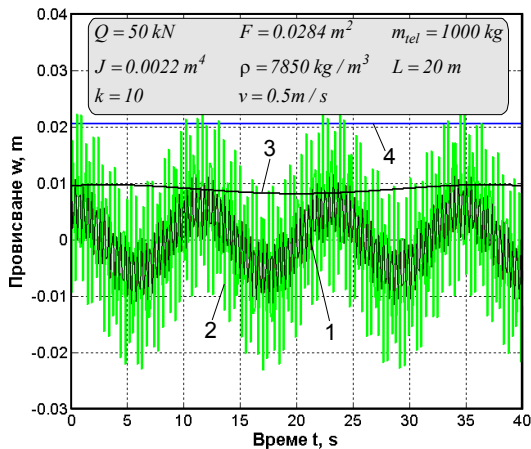
$$k_d = \frac{w(t, x)}{w(x)}$$

Предвид собствената форма на еластичната линия на гредата, дефинирана от (2), динамичният коефициент има най-голямо практическо значение за средното сечение на гредата:

$$k_d = \left. \frac{w(t, x)}{w(x)} \right|_{x=l/2}$$

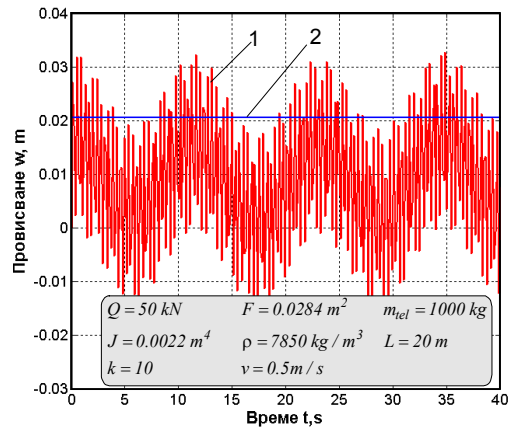
#### 4. АНАЛИЗ НА РЕЗУЛТАТИТЕ

Фиг. 2 визуализира компонентите на функцията на динамичното провисване (45) за сечението на симетрия на гредата, причинено от скорост на телфера  $v = 0.5 \text{ m/s}$ , а на фиг. 3 е показана самата функция (45) за същото сечение.

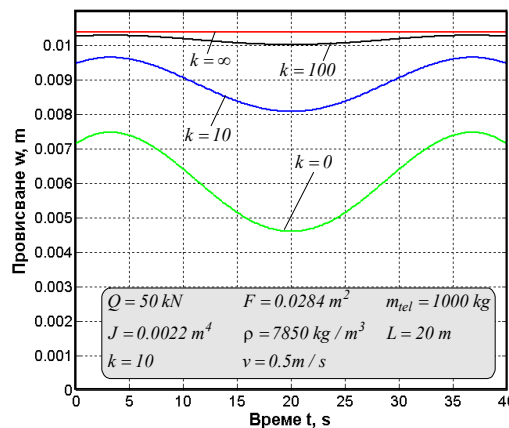


Фиг. 2. Компоненти на функцията на динамичното провисване на сечението на симетрия: 1 – затихващи собствени колебания; 2 – принудени колебания със собствени честоти; 3 – принудени колебания със смущаваща честота; 4 – статично провисване

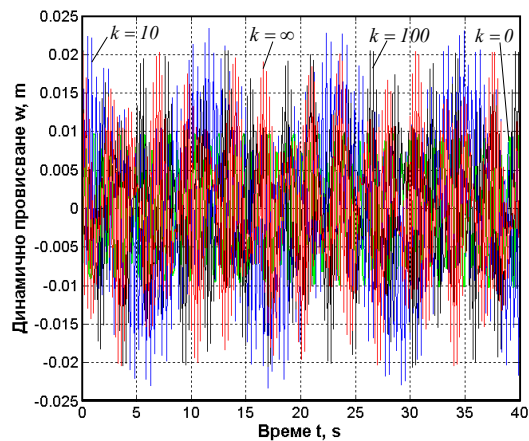
Очевидно приносят на принудените колебания със собствени честоти за получаване на максимално динамично провисване е най-голям (фиг. 2). Прави впечатление (фиг. 3), че максималното динамично провисване на сечението на симетрия е за положение на телфера, не съвпадащи точно със средата на гредата (респ.  $t = 20s$ ), но разположени в непосредствена близост до нея. Както се вижда от фиг. 3, нормалното напрежение в ръбова точка от средното сечение на главната греда ще се променя по асиметричен цикъл, аналогично на динамичното провисване.



Фиг. 3. Графика на функцията на динамичното провисване на сечението на симетрия: 1 – резултантно колебание със собствени и смущаваща честота, следствие движение на телфера; 2 – статично провисване



а.



б.

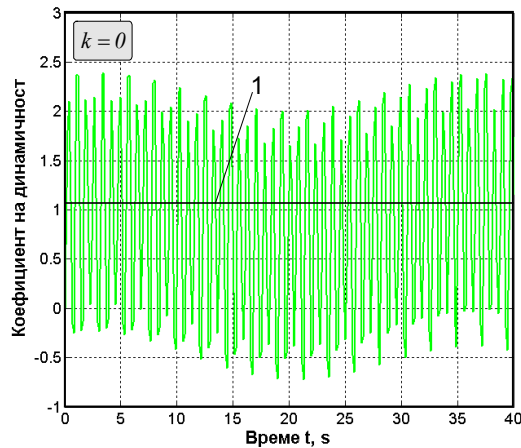
Фиг. 4. Влияние на коефициента  $k$  върху динамичното провисване

Фиг. 4 показва влиянието на коефициента  $k$  (виж зависимост (3)), отчитащ коравината на ъгловите връзки на главната греда, като  $k = 0$  и  $k \rightarrow \infty$  дефинират съответно идеално запънати и ставно свързани краища. С увеличаване на  $k$  (фиг.4а) динамичното провисване от принудените колебания с принудена честота  $\Omega$  се увеличава, като същевременно размаха на амплитудата намалява, така, че при ставно свързани краища тази компонента има подчертано статичен характер. Принудените колебания със собствени честоти са симетрични

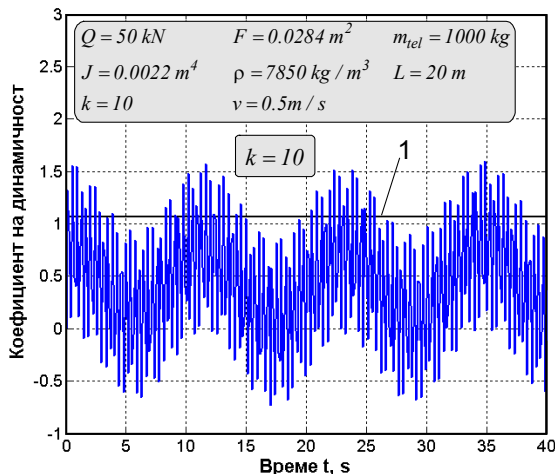
за всяка стойност на  $k$ , като амплитудата е най-малка за  $k=0$ , след това бележи максимална стойност (примерно за  $k=10$ ), за да продължи незначително да намалява.

Фиг. 5 показва влиянието на коефициента  $k$  върху коефициента на динамичност  $k_d$ . Последният е най-голям при идеално запънати краища ( $k=0$ ) и значително надвишава коефициента на динамичност  $k_v$  ( $k_v = 1.04 + 0.06v$ ) от установено движение на телфера по главната греда, показан в (Коларов и др., 1986). С увеличаване на  $k$ , коефициентът на динамичност рязко намалява и се стреми към единица (отгоре).

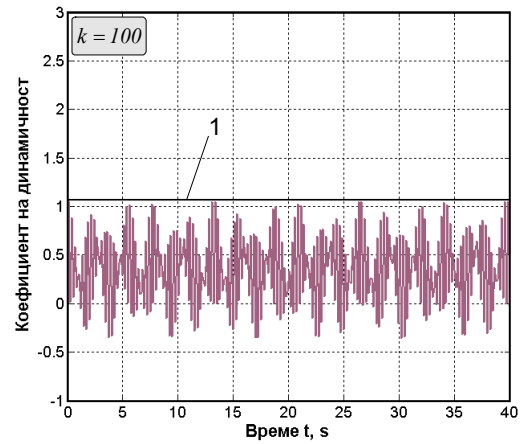
На основата на получената функция от времето на динамичния коефициент, и на разработена информационно изчислителна система за оферирание и оптимално проектиране на металната конструкция на мостови кранове, е разработена методика, адаптирана за MATLAB, за определяне на максималния коефициент на динамичност за положение на товара около средата ( $\pm 0.2m$ ) на главната греда.



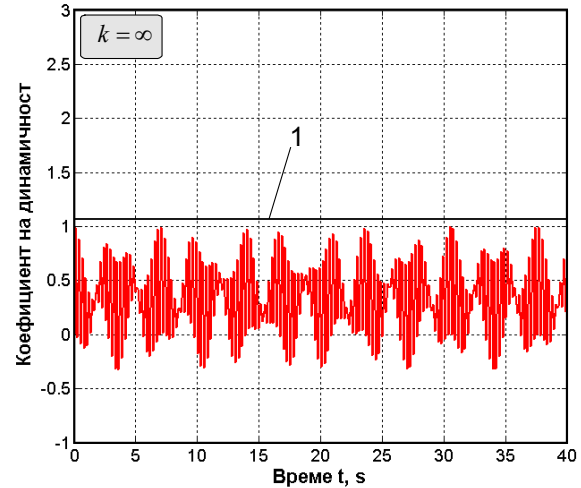
а.



б.



в.



з.

Фиг. 5. Влияние на коефициента  $k$  върху коефициента на динамичност

## ЛИТЕРАТУРА

- Krilov A. N. (1905), Über die erzwungenen schwingungen von gleichförmigen elastischen staben, *Mathematische Annalen*, 61, 211.
- Maximov J.T. (2014), A new approach to modeling the dynamic stressed and strained state of Bernoulli-Euler beam under moving load, *Coupled System Mechanics* (submitted).
- Timoshenko S. P. (1922), On the forced vibrations of bridges, *Philosophical Magazine Series 6*, 43(257), 1018-1019.
- Willis R. (1849), Report of the commissioners appointed to inquire into the application of iron to railway structures, William Clowes & Sons, London.
- Дунчев В.П., Максимов Й.Т. (2013), Трепене на греда на Bernoulli-Euler с еластични ъглови опори под действие на преминаващ товар, *Механика на машините*, 105, 17-24.
- Коларов И., Проданов М., Караиванов П. (1986), Проектиране на товароподемни машини. С., Техника.
- Максимов Й. Т., Дунчев В. П. (2013), Приложение на тригонометрични редове за моделиране на еластичната линия на права двуподпорна греда с ъглови еластични връзки. *Известия на Технически университет Габрово*, 45, 11-16.

"Настоящата статия е изготвена с финансовата помощ на Европейския социален фонд. Русенският университет „Ангел Кънчев“ носи цялата отговорност за съдържанието на настоящия документ, и при никакви обстоятелства не може да се приеме като официална позиция на Европейския съюз или Министерството на образованието и науката."

Проект: № BG051PO001-3.3.06-0008 „Подпомагане израстването на научните кадри в инженерните науки и информационните технологии“