



**ПРИЛОЖЕНИЕ НА ТРИГОНОМЕТРИЧНИ РЕДОВЕ ЗА МОДЕЛИРАНЕ НА
ЕЛАСТИЧНАТА ЛИНИЯ НА ПРАВА ДВУПОДПОРНА ГРЕДА
С ЪГЛОВИ ЕЛАСТИЧНИ ВРЪЗКИ**

**AN APPLICATION OF TRIGONOMETRIC SERIES FOR MODELLING OF THE ELASTIC
LINE OF STRAIGHT TWO-SUPPORTED BEAM WITH ANGULAR ELASTIC
CONNECTIONS**

Й. Т. Максимов*, В. П. Дунчев

Технически университет Габрово, кат. Техническа механика

Статията е постъпила на 23 април 2013 г.; приета за отпечатване на 22 май 2013 г.

Abstract

This article presents a method for modeling of the elastic curve of Euler-Bernoulli straight two-supported beam with angular elastic supports of the end cross-sections. These angular connections restrict the rotations of the end cross-sections when the beam is subjected to bending in principal inertia plane. The beam is statically undetermined. The method is based on an application of infinite trigonometric series. Each combination of simple circular functions, which corresponds to a serial number of the series, satisfies the generalized boundary conditions of the beam. The unknown coefficients in the model are found by means of the principle of virtual displacements for two cases – concentrated force and uniformly distributed load. The beam deflection and bending moments in the end and middle cross-sections are determined for the generalized boundary conditions through introducing dimensionless functions with general argument. The method has been applied for determination of the basic natural frequency of the beam with generalized boundary conditions.

Keywords: Euler-Bernoulli beam, statically undetermined beam, bending, elastic curve, trigonometric series, deflection, bending moments.

1. ВЪВЕДЕНИЕ

Методът на тригонометричните редове за изследване на огъването на греди и плочи е разработен от С. П. Тимошенко [1]. Изразът за провисването на еластичната линия на гредата винаги може да се представи във вид на безкраен тригонометричен ред. Например за гредата със ставно свързани краища изкривената ос на гредата може да се представи с реда [1]:

$$y(x) = b_1 \sin \frac{\pi x}{\ell} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{\ell} + \dots + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} + \dots \quad (1)$$

където ℓ е дължина на гредата, тъй като всяка от простите кръгови функции в дясната част на (1) удовлетворява граничните условия:

$$y(0) = y(\ell) = y''(0) = y''(\ell) = 0$$

В зависимост от външното натоварване, коефициентите b_n в (1) могат да се определят с различни методи, основани на равновесието на еластична система.

С. П. Тимошенко разглежда подробно случаите на права гредата на Bernoulli-Euler за два случая: (i) – със ставно свързани краища; (ii) – с идеално запънати краища, за които извежда приближени формули за провисването в сечението на симетрия на гредата за частни случаи на натоварване [1].

Ако се приеме, че решенията, основани на интегриране на диференциалното уравнение на еластичната ли-

ния на гредата са точни от математична гледна точка, то методът на редовете е приблизителен, тъй като вземайки краен брой членове от реда, физическият еквивалент е замяна на еластична система с безброй степени на свобода с еластична система с краен брой степени на свобода.

Такава апроксимация на точното поведение на еластичната линия може да бъде полезно от инженерна гледна точка за случая на еластично закрепване на краищата на права, двуподпорна, статически неопределена гредата.

В инженерната практика техническите решения на закрепване на краищата на подложена на огъване гредата довеждат не до кораво запъване, а до еластично такова. Например в някои конструктивни решения главната гредата на мостов кран се закрепва в двата си края за вертикалните вътрешни страни на челните греди посредством плочи и фланцови съединения с пасовани втулки и болтове. Еластичността на ъгловите връзки във вертикална равнина е функция на коравината на усукване на челните греди. От гледна точка само на огъване, гредата е двукратно статически неопределена: хиперстатични величини са еластичните моменти в двете допълнителни ъглови връзки.

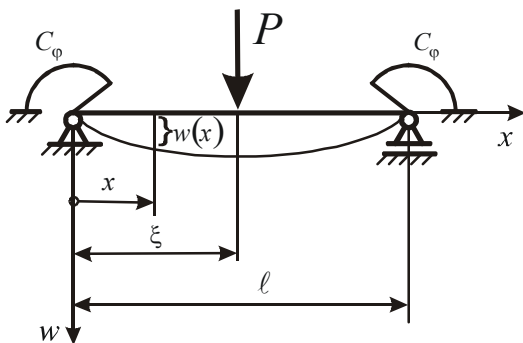
В настоящата работа е предложен инженерен подход, основан на приложение на тригонометрични редове за моделиране на еластичната линия на Bernoulli-Euler права гредата с наложени ъглови еластични връзки.

* Тел.: 066827312; e-mail: maximov@tugab.bg

2. ОБОБЩЕН МОДЕЛ НА ЕЛАСТИЧНАТА ЛИНИЯ

Разглежда се права греда с еластични ъглови връзки с коравина c_φ , ограничаващи завъртанията при огъване на крайните сечения (фиг. 1). Еластичната линия на гредата лежи в равнината xw . Провисването $w(x)$ трябва да удовлетворява условията $w(0) = w(\ell) = 0$, но $w'(0) \neq 0$, $w'(\ell) \neq 0$, $w''(0) \neq 0$, $w''(\ell) \neq 0$, при което между $w'(0)$ и $w''(0)$, респ. $w'(\ell)$ и $w''(\ell)$, съществува корелация: на конкретен ъгъл на завъртане на крайно сечение съществува точно определен еластичен момент. Общият израз за провисването $w(x)$ на еластичната линия се предлага във вида:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{\ell} \right) + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{n=\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (2)$$



Фиг. 1. Двуподпорна греда с наложени еластични ъглови връзки

Всяка от функциите под сумите очевидно удовлетворява първата група гранични условия: $w(0) = w(\ell) = 0$

Производните до втори ред на (2) са:

$$w' = \frac{2\pi}{\ell} \sum_{n=1}^{n=\infty} n A_n \sin \frac{2n\pi x}{\ell} + \frac{\pi}{\ell} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{n=\infty} n B_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}$$

$$w'' = \frac{4\pi^2}{\ell^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 A_n \cos \frac{2n\pi x}{\ell} - \frac{\pi^2}{\ell^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{n=\infty} n^2 B_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

Зависимостта между коефициентите A_n от една страна, и коефициентите B_n от друга страна, се намира от втората група гранични условия:

$$w'(0) = \frac{n\pi B_n}{\ell}; \quad w'(\ell) = -\frac{n\pi B_n}{\ell} \quad (3)$$

Завъртанията на крайните сечения, зависимости (3), причиняват еластични моменти:

$$M(0) = -EJw''(0); \quad M(\ell) = -EJw''(\ell) \quad (4)$$

където EJ е коравина на огъване на гредата, а

$$w''(0) = \frac{4n^2\pi^2}{\ell^2} A_n; \quad w''(\ell) = \frac{4n^2\pi^2}{\ell^2} A_n \quad (5)$$

Еластичните моменти се дефинират като:

$$M(0) = c_\varphi w'(0); \quad M(\ell) = c_\varphi w'(\ell) \quad (6)$$

След заместване на (3)-(5) в (6), вземане предвид, че $M(0)$ и $M(\ell)$ са противоположни и решаване спрямо B_n :

$$B_n = \frac{kn\pi}{4} A_n \quad (7)$$

където:

$$k = \frac{16EJ}{\ell c_\varphi} \quad (8)$$

Предвид (7), провисването $w(x)$ и производните му до втори ред получават вида:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{\ell} \right) + \frac{k\pi}{4} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{n=\infty} n A_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (9)$$

$$w' = \frac{2\pi}{\ell} \sum_{n=1}^{n=\infty} n A_n \sin \frac{2n\pi x}{\ell} + \frac{k\pi^2}{4\ell} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{n=\infty} n^2 A_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}$$

$$w'' = \frac{4\pi^2}{\ell^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 A_n \cos \frac{2n\pi x}{\ell} - \frac{k\pi^3}{4\ell^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{n=\infty} n^3 A_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

Неизвестните коефициенти A_n могат да се определят например чрез принципа на възможните премествания за равновесно положение от предварително зададен товар.

3. ОПРЕДЕЛЯНЕ НА КОЕФИЦИЕНТИТЕ ПРИ НАЛИЧИЕ НА СЪСРЕДОТОЧЕН ТОВАР

Нека върху гредата да действа напречна сила P , отстояща на разстояние ξ от левия край (фиг. 1). Коефициентите A_n се определят от израза за възможната работа:

$$\frac{\partial U}{\partial A_n} \delta A_n = P \delta w_P, \quad (10)$$

където

$$U = U_b + U_s \quad (11)$$

е потенциална енергия на деформация на еластичната система, U_b е потенциална енергия от огъване на гредата, U_s е потенциална енергия на еластичните ъглови опори, δA_n е нарастване на коефициента A_n , а δw_P е възможно преместване на приложната точка на силата P .

За компонентите U_b и U_s (от двете опори) следва:

$$U_b = \frac{EJ}{2} \int_0^\ell w''^2(x) dx = \frac{EJ\pi^4}{\ell^3} \left[4 \sum_{n=1}^{n=\infty} n^4 A_n^2 + k \sum_{n=1,3,5,\dots}^{n=\infty} \left(\frac{2}{3} n^4 + \frac{\pi^2 k}{64} n^6 \right) A_n^2 \right] \quad (12)$$

$$U_s = c_\varphi w'^2(0) = c_\varphi \frac{k^2 \pi^4}{16 \ell^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{n=\infty} n^4 A_n^2$$

или, като се вземе предвид (8):

$$U_s = \frac{EJk\pi^4}{\ell^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{n=\infty} n^4 A_n^2 \quad (13)$$

За нарастване δA_n на коефициента A_n , нарастването на потенциалната енергия U е:

$$\frac{\partial U}{\partial A_n} \delta A_n = \frac{2EJ\pi^4}{\ell^3} \left(4n^4 + \frac{5}{3} kn^4 + \frac{\pi^2 k^2}{64} n^6 \right) A_n \delta A_n \quad (14)$$

Възможното преместване δw_P за нарастване δA_n е:

$$\delta w_P = \delta A_n \left[\left(1 - \cos \frac{2n\pi\xi}{\ell} \right) + \frac{nk\pi}{4} \sin \frac{n\pi\xi}{\ell} \right] \quad (15)$$

След заместване на (14) и (15) в (10) за коефициентите A_n се получава:

$$A_n = \frac{P\ell^3 \left(1 - \cos \frac{2n\pi\xi}{\ell} + \frac{nk\pi}{4} \sin \frac{n\pi\xi}{\ell} \right)}{2EJ\pi^4 \left(4n^4 + \frac{5}{3}kn^4 + \frac{\pi^2 k^2 n^6}{64} \right)} \quad (16)$$

От (16) и (9) за уравнението на еластичната линия на гредата се получава:

$$w = \frac{P\ell^3}{2EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \frac{2n\pi\xi}{\ell} + \frac{nk\pi}{4} \sin \frac{n\pi\xi}{\ell}}{4n^4 + \frac{5}{3}kn^4 + \frac{\pi^2 k^2 n^6}{64}} \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{\ell} \right) + \frac{P\ell^3 k}{8EJ\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1 - \cos \frac{2n\pi\xi}{\ell} + \frac{nk\pi}{4} \sin \frac{n\pi\xi}{\ell}}{4n^3 + \frac{5}{3}kn^3 + \frac{\pi^2 k^2 n^5}{64}} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (17)$$

За $w\left(\frac{\ell}{2}\right)$ и $\xi = \frac{\ell}{2}$, т. е. за провисването на сечението на симетрия, когато в него действа съсредоточена сила, следва:

$$w = \frac{P\ell^3}{2EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi + \frac{nk\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{2}}{4n^4 + \frac{5}{3}kn^4 + \frac{\pi^2 k^2 n^6}{64}} (1 - \cos n\pi) + \frac{P\ell^3 k}{8EJ\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{2 + \frac{nk\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{2}}{4n^3 + \frac{5}{3}kn^3 + \frac{\pi^2 k^2 n^5}{64}} \sin \frac{n\pi}{2}$$

Ако се вземат само първият член под всяка сума ($n=1$), провисването на сечението на симетрия е:

$$w = \frac{P\ell^3}{EJ} f(k), \quad (18)$$

където

$$f(k) = \frac{6}{\pi^4} \frac{(8 + \pi k)^2}{3\pi^2 k^2 + 320k + 768} \quad (19)$$

Функцията (19) представлява обобщение на граничните условия на гредата.

За греда с кораво запънати краища: $k=0$, т. е.

$$f(0) = \frac{1}{2\pi^4} \quad (20)$$

За греда със ставно свързани краища: $k \rightarrow \infty$, т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \frac{2}{\pi^4} \quad (21)$$

На фиг. 2 е показана графика на функцията $f(k)$.

Ако в (17) се положи $n=1$ и $\xi = \frac{\ell}{2}$, за уравнението на еластичната линия следва:

$$w(x) = \frac{P\ell^3}{EJ} \varphi(k) \left[\frac{1}{2\pi} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{\ell} \right) + \frac{k}{8} \sin \frac{\pi x}{\ell} \right] \quad (22)$$

където:

$$\varphi(k) = \frac{48}{\pi^3} \frac{(8 + k\pi)}{(3\pi^2 k^2 + 320k + 768)}$$

На фиг. 2 е показана графика на функцията $\varphi(k)$.

За греда с кораво запънати краища: $k=0$, откъдето

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi^3}, \quad w(x) = \frac{P\ell^3}{4EJ\pi^4} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{\ell} \right) \quad (23)$$

Очевидно, за $x = \frac{\ell}{2}$ в (23) се получава провисването на сечението на симетрия, дефинирано от (18) и (20).

За греда със ставно свързани краища: $k \rightarrow \infty$. Зависимост (22) се представя като:

$$w(x) = \frac{P\ell^3}{EJ} k\varphi(k) \left[\frac{1}{2\pi k} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{\ell} \right) + \frac{1}{8} \sin \frac{\pi x}{\ell} \right],$$

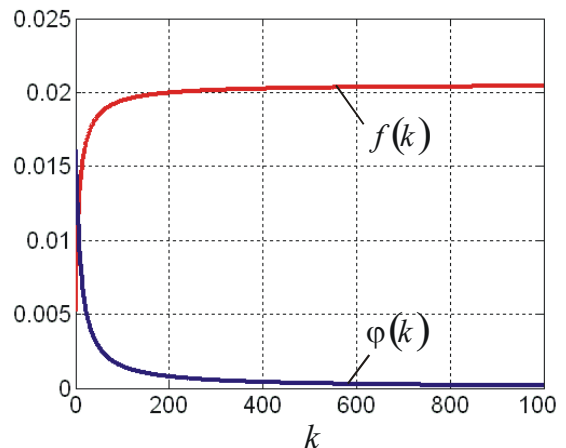
или:

$$w(x) = \frac{P\ell^3}{8EJ} \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} [k\varphi(k)] \right\} \sin \frac{\pi x}{\ell},$$

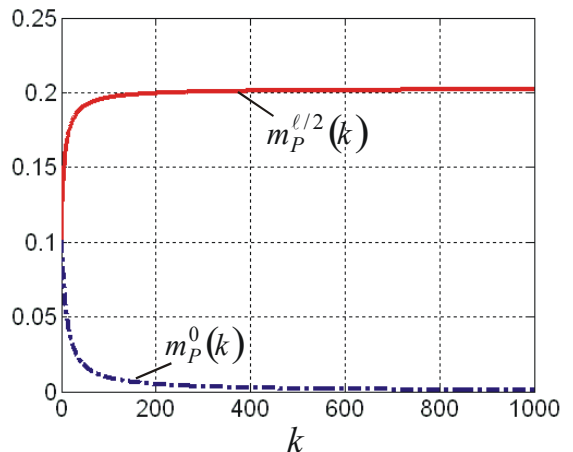
откъдето:

$$w(x) = \frac{2P\ell^3}{\pi^4 EJ} \sin \frac{\pi x}{\ell} \quad (24)$$

За $x = \frac{\ell}{2}$ в (24) се получава провисването на сечението на симетрия, дефинирано от (18) и (21).



Фиг. 2. Графика на функциите $f(k)$ и $\varphi(k)$



Фиг. 3. Графика на функциите $m_p^0(k)$ и $m_p^{l/2}(k)$

Огъващите моменти в крайните сечения на гредата се получават след заместване на (22) в (4):

$$M(0) = M(\ell) = -Plm_p^0(k) \quad (25)$$

Огъващият момент в сечението на симетрия е:

$$M\left(\frac{\ell}{2}\right) = -EJw''\left(\frac{\ell}{2}\right) \quad (26)$$

и след заместване на (22) в (26):

$$M\left(\frac{\ell}{2}\right) = Plm_p^{\ell/2}(k) \quad (27)$$

Функциите $m_p^0(k)$ и $m_p^{\ell/2}(k)$ в (25) и (27) имат вида:

$$m_p^0(k) = 2\pi\varphi(k)$$

$$m_p^{\ell/2}(k) = \pi\left(2 + \frac{k\pi}{8}\right)\varphi(k)$$

и са показани на фиг. 3.

4. ОПРЕДЕЛЯНЕ НА КОЕФИЦИЕНТИТЕ ПРИ НАЛИЧИЕ НА РАВНОМЕРНО РАЗПРЕДЕЛЕН ТОВАР

За случая на равномерно разпределен товар с интензивност q , коефициентите A_n се определят от израза за възможната работа във вида:

$$\frac{\partial U}{\partial A_n} \delta A_n = \int_0^{\ell} q \delta w(x) dx \quad (28)$$

Дясната част на (28) е:

$$\int_0^{\ell} q \delta w(x) = q \int_0^{\ell} \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{\ell} + \frac{k\pi}{4} n \sin \frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \delta A_n$$

или:

$$\int_0^{\ell} q \delta w(x) = q\ell \left(1 + \frac{k}{2}\right) \delta A_n \quad (29)$$

След заместване на (29) и (14) в (28), за A_n следва:

$$A_n = \frac{q\ell^4(2+k)}{4EJ\pi^4 \left(4n^4 + \frac{5}{3}kn^4 + \frac{\pi^2 k^2 n^6}{64}\right)} \quad (30)$$

От (30) и (9) за провисването $w(x)$ под действие на равномерно разпределен товар се получава:

$$w = \frac{q\ell^4}{4EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2+k}{4n^4 + \frac{5}{3}kn^4 + \frac{\pi^2 k^2 n^6}{64}} \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{\ell}\right) + \frac{q\ell^4}{16EJ\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{n=\infty} \frac{k(2+k)}{4n^3 + \frac{5}{3}kn^3 + \frac{\pi^2 k^2 n^5}{64}} \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

Ако се вземе само първият член под всяка сума, т. е. $n = 1$:

$$w(x) = \frac{q\ell^4}{4EJ\pi^4} \varphi_q(k) \left[\frac{1}{\pi} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{\ell}\right) + \frac{k}{4} \sin \frac{\pi x}{\ell} \right], \quad (31)$$

където:

$$\varphi_q(k) = \frac{1}{4\pi^3} \frac{2+k}{4 + \frac{5}{3}k + \frac{\pi^2 k^2}{64}}$$

На фиг. 4 е показана графика на функцията $\varphi_q(k)$.

От (31) се получават следните частни случаи на гранични условия:

• Греда с кораво запънати краища: $k = 0$, откъдето:

$$\varphi_q(0) = \frac{1}{8\pi^3}$$

$$w(x) = \frac{q\ell^4}{8EJ\pi^4} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{\ell}\right)$$

• Греда със ставно свързани краища: $k \rightarrow \infty$, а зависимост (31) се представя като:

$$w(x) = \frac{q\ell^4}{4EJ} \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} [k\varphi_q(k)] \right\} \sin \frac{\pi x}{\ell}$$

или:

$$w(x) = \frac{4q\ell^4}{\pi^5 EJ} \sin \frac{\pi x}{\ell}$$

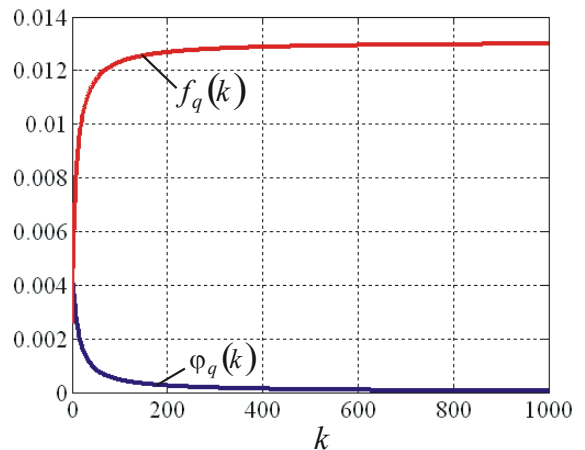
Провисването на сечението на симетрия се получава като в (31) се положи $x = \frac{\ell}{2}$:

$$w\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{q\ell^4}{EJ} f_q(k) \quad (32)$$

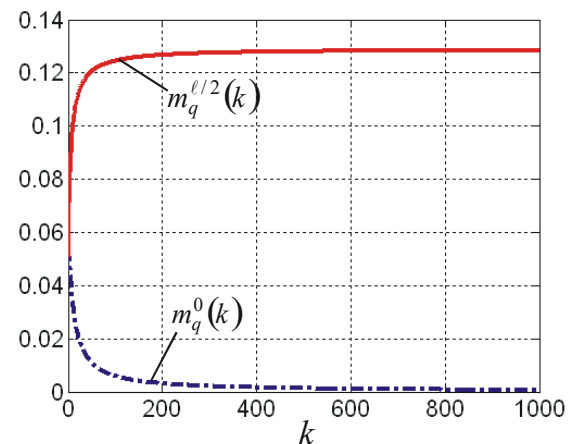
където:

$$f_q(k) = \frac{8+k\pi}{4\pi} \varphi_q(k) \quad (33)$$

Функцията (33) представлява обобщение на граничните условия за случая на равномерно разпределен товар. На фиг. 4 е показана графика на функцията $f_q(k)$.



Фиг. 4. Графика на функциите $f_q(k)$ и $\varphi_q(k)$



Фиг. 5. Графика на функциите $m_q^0(k)$ и $m_q^{\ell/2}(k)$

От (32) се получават провисванията на сечението на симетрия за следните частни случаи:

• Греда с кораво запънати краища ($k = 0$)

$$w\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{q\ell^4}{4\pi^4 EJ}$$

• Грета със ставно свързани краища ($k \rightarrow \infty$)

$$w\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{4q\ell^4}{\pi^5 EJ}$$

Огъващите моменти в крайните сечения на гредата и в сечението на симетрия се намират, след заместване на (31) в (4) и в (26):

$$M(0) = M(\ell) = -q\ell^2 m_q^0(k)$$

$$M\left(\frac{\ell}{2}\right) = q\ell^2 m_q^{\ell/2}(k)$$

На фиг. 5 са показани графики на безразмерните функции $m_q^0(k)$ и $m_q^{\ell/2}(k)$, където

$$m_q^0(k) = 4\pi\varphi_q(k)$$

$$m_q^{\ell/2}(k) = \pi\left(4 + \frac{k\pi}{4}\right)\varphi_q(k)$$

5. ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ОСНОВНАТА СОБСТВЕНА ЧЕСТОТА НА ГРЕДАТА, СЪОТВЕТСТВАЩА НА ОСНОВНАТА ОГЪВНА СОБСТВЕНА ФОРМА

5.1. Същност на метода

Задава се основната собствена огъвна форма на еластичната линия, като в (9) се полага $n = 1$, а за коефициента $A_n|_{n=1}$ се приема, че е хармонична функция на времето t с амплитуда A . За свободните колебания на гредата в основната собствена форма се получава:

$$w(x,t) = A(t)\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{\ell}\right) + \frac{k\pi}{4}A(t)\sin\frac{\pi x}{\ell} \quad (34)$$

където $A(t) = A\sin(\omega t + \psi)$, ω е търсената собствена честота, A и ψ са неизвестни константи, които зависят от началните условия: $w(x,0) = w_0(x)$; $\dot{w}(x,0) = \dot{w}_0(x)$.

Гредата е натоварена с разпределен инерционен товар $q(x,t)$, който съгласно принципа на D'Allembert е:

$$q(x,t) = -\rho F\ddot{w}(x,t) \quad (35)$$

където ρ е плътност на материала на гредата, F е площ на напречното ѝ сечение. След заместване на (34) в (35):

$$q(x,t) = -\rho F A(t)\omega^2 \left[\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{\ell}\right) + \frac{k\pi}{4}\sin\frac{\pi x}{\ell} \right] \quad (36)$$

За динамичното равновесие на еластичната линия се прилага принципът на възможните епемествания. Изразът за възможната работа е аналогичен на (28):

$$\frac{\partial U}{\partial A(t)} \delta A(t) = \int_0^{\ell} q(x,t) dx \delta w(x) \quad (37)$$

където потенциалната енергия на деформация на еластичната линия в основната собствена форма се получава от (11), (12) и (13) след полагане на $n = 1$:

$$U = \frac{2EJ\pi^4}{\ell^3} \left(4 + \frac{5}{3}k + \frac{\pi^2}{64}k^2 \right) A^2(t) \quad (38)$$

След заместване на (35), (36) и (38) в (37), диференциране на лявата част, интегриране на дясната част и съкращаване на вариацията $\delta A(t)$, за основната собствена честота се получава:

$$\omega = \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} \varpi(k) \quad (39)$$

където безразмерната функция (фиг. 6)

$$\varpi(k) = \sqrt{\frac{8 + \frac{10}{3}k + \frac{\pi^2}{32}k^2}{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}k + \frac{\pi^2}{32}k^2}}$$

обобщава граничните условия на гредата.

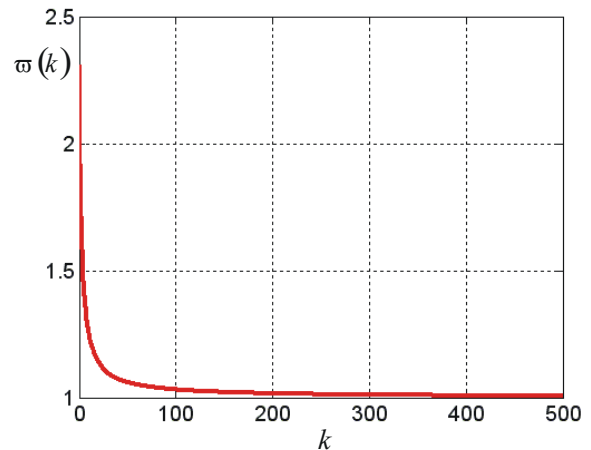
За кораво запънати краища ($k = 0$):

$$\varpi(k) = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

За ставно закрепени краища ($k \rightarrow \infty$) очевидно:

$$\varpi(k) = 1,$$

т. е. основната собствена честота на гредата с кораво запънати краища е $\frac{4}{\sqrt{3}}$ пъти по-голяма в сравнение със случая на ставно закрепени краища.



Фиг. 6. Графика на безразмерната функция $\varpi = \varpi(k)$

5.2. Сравнение с конвенционалния метод и с МКЕ

Конвенционалният метод за определяне на собствените честоти на прави греди на Euler-Bernoulli е основан върху известното диференциално уравнение на свободни колебания:

$$EJw^{IV} + \rho F\ddot{w} = 0 \quad (40)$$

чието решение се търси във вида

$$w(x,t) = X(x)\sin\omega t, \quad (41)$$

което води до т. нар. честотно уравнение, по правило трансцендентно, от което се определят собствените честоти.

От (41) и (40) следва:

$$X^{IV} - aX = 0,$$

чийто общ интеграл е:

$$X = c_1 \sin ax + c_2 \cos ax + c_3 \operatorname{sh} ax + c_4 \operatorname{ch} ax, \quad (42)$$

където:

$$a^4 = \frac{\rho F \omega^2}{EJ},$$

а $c_i, i = 1, \dots, 4$ са интеграционни константи.

Граничните условия са (виж фиг. 1):

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 \\ X(\ell) &= 0 \\ c_\varphi X'(0) - EJX''(0) &= 0 \\ c_\varphi X'(\ell) - EJX''(\ell) &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

След заместване на (42) в (43) се получава система линейни алгебрични уравнения по отношение на интеграционните константи:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin a\ell & \cos a\ell & \operatorname{sh} a\ell & \operatorname{ch} a\ell \\ ac_\varphi & a^2 EJ & ac_\varphi & -a^2 EJ \\ a \begin{pmatrix} c_\varphi \cos a\ell - \\ -aEJ \sin a\ell \end{pmatrix} & -a \begin{pmatrix} c_\varphi \sin a\ell + \\ +aEJ \cos a\ell \end{pmatrix} & a \begin{pmatrix} c_\varphi \operatorname{ch} a\ell + \\ +aEJ \operatorname{sh} a\ell \end{pmatrix} & a \begin{pmatrix} c_\varphi \operatorname{sh} a\ell + \\ +aEJ \operatorname{ch} a\ell \end{pmatrix} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

Честотното уравнение се получава от необходимото и достатъчно условие за нетривиално решение на (44): т. е. детерминантата на матрицата от коефициенти пред неизвестните да бъде равна на нула:

$$3ab \sin \gamma \operatorname{ch} \gamma - 4ab \cos \gamma \operatorname{sh} \gamma + 3a^2 \sin \gamma \operatorname{sh} \gamma + 2b^2 - 2b^2 \cos \gamma \operatorname{ch} \gamma - a^2 \sin^2 \gamma + ab \sin \gamma \cos \gamma = 0 \quad (45)$$

където: $b = \frac{16}{k\ell}$, $\gamma = a\ell$, а k е дефинирано от зависимост (12). Трансцендентното уравнение (45) може да се реши само числено.

Например за: $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $E = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$, $J = 0.0022 \text{ m}^4$, $F = 0.0284 \text{ m}^4$, $\ell = 16.5 \text{ m}$ и $k = 5$ (посочените параметри са на главната греда на мостов кран с товароподемност $Q = 125 \text{ kN}$, чиято метална конструкция е проектирана от Максимов Консулт АД), посредством Matlab, за основната собствена честота е получено $\omega = 76.7682 \text{ s}^{-1}$. За същите числени параметри посредством МКЕ е получено $\omega = 71.8863 \text{ s}^{-1}$ - решението е извършено посредством CosmosM с дискретизация от 100 КЕ, тип ВЕАМ 2D, като е използван метода „итерации в подпространство“ [2]. За същите числени стойности на параметрите на гредата по (39) лесно може да се изчисли основната собствена честота: $\omega = 72.7271 \text{ s}^{-1}$. Ако за „точно“ може да се приеме решението, получено от честотното уравнение (45), то решението от (39) се отличава с 5% от точното, което е достатъчно точно от инженерна гледна точка. Със същите параметри, но за

граничните случаи ($k = 0$ и $k \rightarrow \infty$) е направено аналогично сравнение (табл. 1).

Очевидно, грешката на решението, получено от (39) е значително по-малка от 5%, което доказва ефективността на предложения метод.

Таблица 1 Сравнителна таблица за основната собствена честота

k	Основна собствена честота ω, s^{-1}		
	Уравн. (45)	МКЕ	Уравн. (3970)
0	115.456	115.451	117.6152
5	76.7682	71.8863	72.7271
∞	50.925	50.929	50.922

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методът на безкрайните тригонометрични редове е приложен за моделиране на еластичната линия на права, двуподпорна греда с еластично запънати краища. Тези връзки ограничават завъртанятия на крайните сечения при огъване на гредата, в зависимост от коравината на връзките. Получени са прости формули за провисването на гредата и за огъващите моменти в крайните и средното сечение. Тези формули са в обобщен вид, тъй като съдържат безразмерни функции, от които се получават частни случаи на гранични условия. Методът е приложен за определяне на основната собствена честота на гредата, съответстваща на основната собствена огъвна форма. Получена е удобна формула за основната собствена честота. Формулата съдържа безразмерна функция, която обобщава на граничните условия на гредата.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тимошенко С. П. Курс теорий упругости. „Наукова думка“, Киев, 1972.
- [2] Максимов Й. Т., Дунчева Г. В., Анчев А. П. Компютърни методи за инженерен анализ. Книга 3: Устойчивост и линейна динамика. ЕКСПРЕС, Габрово, 2011.