

Раздел 1
ПРИЛОЖНА МЕХАНИКА И МАТЕМАТИКА**Section 1**
APPLIED MECHANICS AND MATHEMATICS**ДИНАМИЧНО ПОВЕДЕНИЕ НА ПРАВА ГРЕДА ВЪРХУ ЕЛАСТИЧНИ ОПОРИ ПОД ДЕЙСТВИЕ НА ДВИЖЕЩ СЕ ТОВАР – ОБОБЩЕНИЕ НА УРАВНЕНИЕТО НА R. WILLIS****DYNAMIC BEHAVIOUR OF STRAIGHT BEAM ON ELASTIC SUPPORTS SUBJECTED TO MOVING LOAD – GENERALIZATION OF R. WILLIS' EQUATION****Й. Т. Максимов^{*}, В. П. Дунчев**

Технически университет – Габрово, кат. Техническа механика

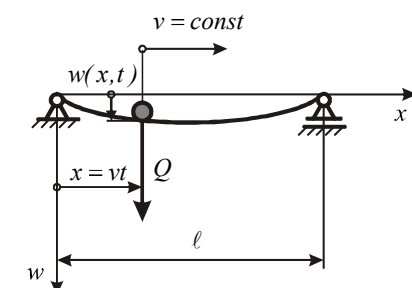
Статията е постъпила на 10 март 2013 г.; приета за отпечатване на 15 май 2013 г.

Abstract

This article discusses the dynamic response of Bernoulli-Euler straight beam on elastic supports subjected to moving load with variable velocity. An engineering approach for determination of the dynamic effect from the moving load on the stressed state of the beam has been developed. A dynamic coefficient, a ratio of the dynamic to the static deflection of the beam, has been defined. Generalization of the R. Willis' equation has been carried out: generalized boundary conditions have been introduced; the force of inertia from normal acceleration, Coriolis force and reduced beam mass have been taken into account. The influence of the boundary conditions and kinematic characteristics of the moving load on the dynamic coefficient has been investigated.

Keywords: two-supported beam, moving load, dynamic deflection, elastic supports**1. ВЪВЕДЕНИЕ**

Движещият се по гредата товар причинява огъвни трептения, следствие на което в гредата възникват по-големи напрежения в сравнение със случая на статично действие на същия товар. Вибрации от този тип се срещат в много инженерни обекти, като например мостове, железопътни релси, главните греди на мостови кранове и др. Възникването на този инженерен проблем е свързано със строежа и експлоатацията на железопътни съоръжения. Първият математичен модел на еластичната линия на права гредата на Bernoulli – Euler, натоварена с движещ се с постоянна скорост v товар, е получен от проф. R. Willis през 1849 г. за случая на ставно закрепени краища (фиг. 1):



Фиг. 1. Модел на ставно закрепена гредата с подвижен товар

$$w = Q \left(1 - \frac{v^2}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{x^2 (\ell - x)^2}{3 \ell E J} \quad (1)$$

където w е провисването на гредата под товара, Q и v са тегло и скорост на товара, g е земното ускорение, ℓ и EJ са дължина и коравина на огъване на гредата.

Приближено решение на (1) е показано в [1]. Пълно решение, отначало във вид на редове, а след това в затворена форма, е получено от G. G. Stokes през 1849 г. Числен подход за решение на (1), основан на метода на Runge, е приложен за пръв път от Н. П. Петров през 1903 г. Както се вижда от (1), масата на гредата е пренебрегната и системата „гредата – подвижен товар“ е сведена до такава с една степен на свобода, имаща постоянна маса и променлива еластичност.

Противоположният модел на поведение на еластичната линия на гредата със ставни краища под действие на подвижен товар е когато масата на същия се пренебрегва, респ. се отчита само разпределената маса на гредата. Решението на този проблем е получено от С. П. Тимошенко през 1922 г. за случая на постоянна по големина сила и на хармонична смущаваща сила [1]. На тази основа Тимошенко предлага приблизително решение на проблема, когато се отчита и масата на движещия се товар: първоначално се решава задачата с принудените

^{*} Тел.: 066827312; e-mail: maximov@tugab.bg

колебания на гредата под действие на постоянна сила, равна на теглото на товара, движеща се с постоянна скорост; на базата на получените премествания на точките от еластичната линия на гредата се съставя израз за инерционната сила на товара, който се прибавя към статичното тегло.

През последните десетилетия са направени много решения на модели на греди, подложени на движещ се товар в различни инженерни приложения: греда върху еластична основа – Винклерова основа [2-5], визкозо-еластична основа [6-8], нелинейно-еластична основа [9, 10] еластична основа, моделирана чрез пружини с различна коравина [11]; проста хоризонтална ставна греда [12-26]; наклонена проста греда [27]; съставна греда [28]; непрекъсната греда [29, 30]; греда върху еластични опори [31]; греда с обобщени гранични условия [32]. От гледна точка на модела на напрегнато и деформирано състояние преобладават греди на Bernoulli – Euler [1-36] пред греди на Тимошенко [37, 38]. Преобладава аналитичният подход за решение пред крайно-елементния [11, 20, 21]. Някои от моделите се отнасят за предварително напрегнати греди посредством осов товар на натиск [2, 5, 14, 22]. Преобладават моделите, в които не се отчита масата на подвижния товар. В [12] инерционният ефект от преминаващия товар е намерен числено, посредством β -метода на Newmark, и е включен след това в силовата функция на товара. В [19] е отчетена масата и масовия инерционен момент на подвижния товар, който се движи с постоянно хоризонтално ускорение, както и инерционния ефект от завъртане на сечението на гредата. Не е отчетен обаче инерционния ефект от масата на товара непосредствено върху напречните колебания на гредата, а само чрез силата на теглото и на инерционната сила от хоризонталното ускорение на товара.

В мнозинството публикации е разгледан случая на постоянна скорост на товара. Изследване на влиянието на ускорението е направено в [19, 32]. Преобладават моделите с постоянна големина на подвижния товар. В [32] е направен модел с подвижна сила, променяща се по големина по хармоничен закон. В [5] подвижната сила се променя експоненциално по големина и е приложен числен подход – методът на крайните разлики. В някои от моделите е приложен динамичен абсорбер [16, 24], движещ се по оста на гредата.

Модели на по-сложни обекти – съответно мостова система, която е изследвана в режим на резонанс, и модел на превозно средство, са направени в [33, 34].

Прави впечатление, че моделите на двуподпорни греди се отнасят главно до ставно-свързани краища, което има логично обяснение: честотното уравнение е най-просто, а от там и общото решение в безкрайни тригонометрични редове.

Обикновено в инженерната практика техническите решения на закрепване препологат линейна и ъглова еластичности на краищата на гредата. Например такъв е случаят на закрепване на главната греда на мостов кран, когато същата е закрепена посредством плоча и фланцови съединения за челните греди; еластичността на ъгловите връзки в двата края на главната греда се предопределя от коравината на усукване на челните греди. Същевременно, поради огъване на челните греди, краищата на главната греда са еластично подпярни.

Следователно обобщен модел на двуподпорна греда е необходимо да се използва – греда върху еластични опори с наложени еластични ъглови връзки, ограничаващи завъртанията на крайните сечения при огъване.

Усилията на изследователите са насочени към моделиране на напречните колебания на гредата под действие на преминаващ товар [2-38], като акцентът е поставен върху изучаване на поведението на математичния модел. Този подход има своите незаменими предимства, например при изучаване на резонансните режими на работа, греди върху еластична основа и др. Същевременно получените решения са достатъчно сложни, за да не се нуждае от изчислителна техника и съответен софтуер крайния потребител, т. е. инженерът – конструктор. Крайно-елементните решения носят всички предимства и недостатъци на числените решения. За инженера – конструктор в много случаи на двуподпорни греди е необходима по-проста формула, която в първо приближение да му предложи решение. В този аспект възможен подход за решение е обобщение на уравнението на R. Willis. Няколко аргумента има в полза на тази идея:

- В инженерните приложения еластичната линия на двуподпорна греда съответства на основния си полутон при свободни колебания, а презумпцията е, че работният режим е извън резонансен. Следователно е целесъобразно да се приложи подходът на R. Willis за получаване на динамичното провисване;

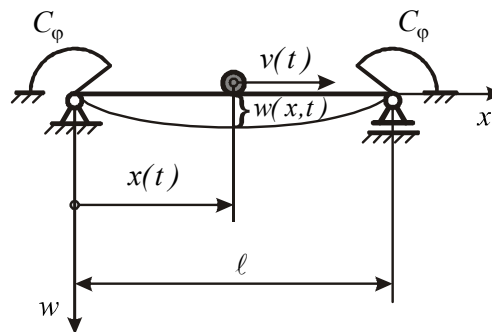
- Практиката показва, че огъвните напрежения в двуподпорна греда са най-големи, когато товарът е еднакво отдалечен от двете опори. В модела може да се включи редуцираната маса на гредата за това положение на товара;

- Следствие огъването на гредата товарът се движи по крива, поради което в модела може да се включи инерционната сила не само от напречните премествания, но и от нормалното и кориолисовото ускорения. Последното възниква вследствие завъртанията на сечението на гредата. При това, ъгълът между векторите на преносната ъглова скорост и релативната скорост на товара е 90° ;

- В допълнение, този подход позволява по-лесно да се изследва ефектът от хоризонталното ускорение на товара.

Основна цел на стаията е посредством инженерен подход да се получи опростен математичен модел на динамичния ефект от движение на товар по двуподпорна греда от типа Bernoulli – Euler с наложени еластични ъглови връзки.

2. ОБОБЩЕН МАТЕМАТИЧЕН МОДЕЛ



Фиг. 2. Модел на еластичната линия с подвижен товар

Динамичното провисване $w(x, t)$ на еластичната линия на гредата (фиг. 2) под товара се представя като:

$$w(x, t) = P(t)y(x), \quad (2)$$

където $y(x)$ е провисване под действие на единична сила, а $P(t)$ е еквивалентен динамичен товар. Последният включва нормална реакция от товара към гредата, инерционна сила от приведената маса на гредата

$$-\frac{G_{red}}{g} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}$$

и сила от редуцираното тегло G_{red} на гредата.

Нормалната реакция от товара към гредата е сума от статичното тегло Q на товара, от инерционна сила от вертикално преместване (провисване) на гредата

$$-\frac{Q}{g} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2},$$

от инерционна сила от нормалното ускорение a_n , вследствие от движение на товара по крива (кривината е отрицателна за приетата координатна система от фиг. 2),

$$\frac{Q}{g} a_n = -\frac{Qv^2}{g} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2},$$

от инерционна сила от кориолисовото ускорение на товара, следствие от завъртане на сеченията

$$-2 \frac{Q}{g} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x \partial t} v.$$

За динамичното провисване $w(x, t)$ следва:

$$w(x, t) = \left[(Q + G_{red}) - \frac{(Q + G_{red})}{g} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - \frac{Qv^2}{g} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - 2 \frac{Q}{g} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x \partial t} v \right] y(x) \quad (3)$$

Нека $v = v(t)$. Тогава, след смяна на реда на диференциране:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[v(t) \frac{\partial w}{\partial x} \right] = \\ &= \dot{v}(t) \frac{\partial w}{\partial x} + v(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial x}{\partial x} = \\ &= \dot{v}(t) \frac{\partial w}{\partial x} + v^2(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (4)$$

От друга страна:

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial x} \right) = v(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (5)$$

След заместване на (4) и (5) в (3):

$$w(x, t) = \left[(Q + G_{red}) - \frac{(4Q + G_{red})v^2}{g} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \frac{(Q + G_{red})\dot{v}(t)}{g} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right] y(x) \quad (6)$$

3. СЪЩНОСТ НА ИНЖЕНЕРНИЯ ПОДХОД

Въвежда се понятието „динамичен коефициент“ k_d , който показва колко пъти се увеличава статичния товар върху гредата, следствие движението на товара:

$$k_d = \frac{w(x, t)}{w(x)} \quad (7)$$

където $w(x)$ е провисването на гредата от статичния товар $Q + G_{red}$:

$$w(x) = (Q + G_{red})y(x) \quad (8)$$

След заместване на (6) и (8) в (7):

$$k_d = 1 - \left[\frac{(4Q + G_{red})v^2}{(Q + G_{red})g} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\dot{v}(t)}{g} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right]. \quad (9)$$

Зависимост (9) се представя като:

$$k_d = 1 + \alpha_d \quad (10)$$

където:

$$\alpha_d = - \left[C(t) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\dot{v}(t)}{g} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right], \quad (11)$$

$$C(t) = \frac{(4Q + G_{red})v^2(t)}{(Q + G_{red})g}. \quad (12)$$

Определянето на k_d се извършва чрез последователни приближения:

- В първо приближение се полага:

$$P^{(1)}(t) = Q + G_{red},$$

откъдето:

$$w^{(1)}(x, t) = (Q + G_{red})y(x)$$

и след заместване в (11):

$$\alpha_d^{(1)} = \alpha = - \left[C(t) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{\dot{v}(t)}{g} \frac{dy(x)}{dx} \right] (Q + G_{red})$$

За динамичния коефициент следва:

$$k_d^{(1)} = 1 + \alpha,$$

където: $0 < \alpha < 1$.

- Във втората итерация се полага

$$P^{(2)}(t) = k_d^{(1)}(Q + G_{red})$$

Намира се

$$\alpha_d^{(2)} = - \left[C(t) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{\dot{v}(t)}{g} \frac{dy(x)}{dx} \right] k_d^{(1)}(Q + G_{red})$$

или:

$$\alpha_d^{(2)} = \alpha k_d^{(1)}$$

За $k_d^{(2)}$ следва:

$$k_d^{(2)} = 1 + \alpha_d^{(2)} = 1 + \alpha k_d^{(1)} = 1 + \alpha(1 + \alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2$$

- В третата итерация се полага:

$$P^{(3)}(t) = k_d^{(2)}(Q + G_{red})$$

откъдето:

$$\alpha_d^{(3)} = - \left[C(t) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{\dot{v}(t)}{g} \frac{dy(x)}{dx} \right] k_d^{(2)}(Q + G_{red})$$

или:

$$\alpha_d^{(3)} = \alpha k_d^{(2)} = \alpha(1 + \alpha + \alpha^2)$$

За $k_d^{(3)}$ следва:

$$k_d^{(3)} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3$$

- В n -тата итерация:

$$k_d^{(n)} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^n$$

Тъй като винаги $0 < \alpha < 1$, то k_d се представя по този начин като безкраен геометричен абсолютно сходящ ред. За k_d следва:

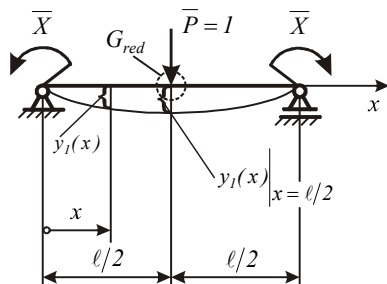
$$k_d = \lim_{n \rightarrow \infty} k_d^{(n)} = \frac{1}{1 - \alpha} \quad (13)$$

където:

$$\alpha = - \left[C(t) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{\dot{v}(t)}{g} \frac{dy(x)}{dx} \right] (Q + G_{red}) \quad (14)$$

4. ОПРЕДЕЛЯНЕ НА РЕДУЦИРАНОТО ТЕГЛО НА ГРЕДАТА

Редуцираното тегло G_{red} се определя за центъра на сечението на симетрия на гредата, на базата на равенство на кинетичните енергии на гредата, имаща: (i) разпределена маса; (ii) маса, съсредоточена в центъра на сечението на симетрия (фиг. 3):



Фиг. 3. Схема за определяне на редуцираното тегло

$$G_{red} = 2 \frac{G}{l} \int_0^{l/2} \left(\frac{y_1(x)}{y_1(x)_{x=l/2}} \right)^2 dx, \quad (15)$$

където G е тегло на гредата, а метричните величини са означени на фиг. 3: l е дължина на гредата, $y_1(x)$ е провисване под действие на единична сила, приложена в центъра на сечението на симетрия. На фиг. 3 с \bar{X} са означени реактивните моменти в ъгловите връзки, като:

$$\bar{X} = \frac{l}{8 + k}, \quad (16)$$

където:

$$k = \frac{16 EJ}{l c_\phi}, \quad (17)$$

а c_ϕ е коравина на ъгловите връзки. Двата гранични случая (диаметрално противоположни) са: греда с кораво запънати краища - $c_\phi \rightarrow \infty$, а $k \rightarrow 0$; греда със ставно свързани краища - $c_\phi = 0$, а $k \rightarrow \infty$.

Провисването $y_1(x)$ се дефинира като суперпозиция от провисванията в две прости греди:

$$y_1(x) = \frac{1}{48 EJ} (3l^2 x - 4x^3) + \frac{\bar{X}}{2 EJ} (x^2 - lx) \quad (18)$$

След заместване на (16)-(18) в (15), интегриране и съответни преобразувания се получава:

$$G_{red} = \beta_{red} G,$$

където

$$\beta_{red} = \frac{34k^2 + 117k + 104}{70k^2 + 280k + 280}$$

е коефициент на редукция на масата на гредата и очевидно зависи нелинейно от k , респ. от коравината на ъгловите връзки. За греда с кораво запънати краища ($k \rightarrow 0$):

$$\beta_{red}(k)_{k=0} = \min \beta_{red} = \frac{13}{35} \quad (19)$$

За ставна греда ($k \rightarrow \infty$):

$$\max \beta_{red} = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{red}(k) = \frac{17}{35} \quad (20)$$

Както се вижда от (19) и (20), начинът на ограничаване на завъртанията на крайните сечения не влияе съществено на редуцираното тегло.

5. ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ФУНКЦИЯТА $y = y(x)$

Функцията $y = y(x)$ се намира чрез принципа на суперпозицията (фиг. 4), като сума от провисванията в три прости греди под действие на единична сила $\bar{P} = 1$:

$$y(x) = y_{\bar{P}}(x) + y_{\bar{X}_1}(x) + y_{\bar{X}_2}(x)$$

или:

$$y(x) = F_{\bar{P}}(x) + \bar{X}_1 F_1(x) + \bar{X}_2 F_2(x) \quad (21)$$

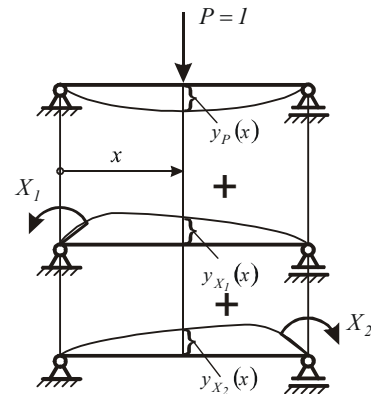
където:

$$F_{\bar{P}}(x) = \frac{x^2(l-x)^2}{3lEJ},$$

$$F_1(x) = \frac{1}{6lEJ} (-x^3 + 3lx^2 - 2l^2x), \quad (22)$$

$$F_2(x) = \frac{1}{6lEJ} (x^3 - l^2x),$$

са функции на формата на еластичната линия.



Фиг. 4. Принцип на суперпозицията за определяне на $y(x)$

Моментите $\bar{X}_i, i = 1, 2$ са реакции в наложените еластични връзки в двата края на гредата под действие на единична сила $\bar{P} = 1$. Например чрез силовия метод, $\bar{X}_i, i = 1, 2$ се получават като корени на системата

$$\begin{cases} \left(\delta_{11} + \frac{1}{c_\phi} \right) \bar{X}_1 + \delta_{12} \bar{X}_2 = \bar{\Delta}_{1\bar{P}} \\ \delta_{21} \bar{X}_1 + \left(\delta_{22} + \frac{1}{c_\phi} \right) \bar{X}_2 = \bar{\Delta}_{2\bar{P}} \end{cases}$$

а именно:

$$\bar{X}_1 = \frac{\bar{\Delta}_{1\bar{P}} \left(\delta_{11} + \frac{1}{c_\varphi} \right) - \bar{\Delta}_{2\bar{P}} \delta_{12}}{\delta_{12}^2 - \left(\delta_{11} + \frac{1}{c_\varphi} \right)^2} \quad (23)$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\bar{\Delta}_{2\bar{P}} \left(\delta_{22} + \frac{1}{c_\varphi} \right) - \bar{\Delta}_{1\bar{P}} \delta_{21}}{\delta_{21}^2 - \left(\delta_{22} + \frac{1}{c_\varphi} \right)^2}$$

където c_φ е коравина на ъглова връзка;

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{\ell}{3EJ}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{\ell}{6EJ}, \quad (24)$$

$$\bar{\Delta}_{1\bar{P}} = -\frac{x(\ell-x)(2\ell-x)}{6\ell EJ}, \quad \bar{\Delta}_{2\bar{P}} = -\frac{x(\ell-x)(\ell+x)}{6\ell EJ}.$$

След заместване на (24) в (23)

$$\bar{X}_1 = \frac{(2k_2+1)x^3}{3k_1\ell^2} - \frac{2k_2x^2}{k_1\ell} + \frac{(4k_2-1)x}{3k_1} \quad (25)$$

$$\bar{X}_2 = -\frac{(2k_2+1)x^3}{3k_1\ell^2} + \frac{1x^2}{k_1\ell} + \frac{2(k_2-1)x}{3k_1}$$

където:

$$k_1 = 1 + \frac{k}{2} + \frac{3k^2}{64},$$

$$k_2 = 1 + \frac{3k}{16}$$

а k се определя от (17).

Втората производна $\frac{d^2y(x)}{dx^2}$ на (21) е:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = F_{\bar{P}}'' + \bar{X}_1'' F_1 + 2\bar{X}_1' F_1' + \bar{X}_1 F_1'' + \bar{X}_2'' F_2 + 2\bar{X}_2' F_2' + \bar{X}_2 F_2'' \quad (26)$$

Интерес представлява изразът:

$$\left. \frac{d^2y(x)}{dx^2} \right|_{x=\frac{\ell}{2}},$$

тъй като в сечението на симетрия на гредата огъвното напрежение в ръбова точка е най-голямо по абсолютна стойност. След заместване на (22) и (25) в (26), извършване на съответните диференцирания, полагане на $x = \ell/2$ и преобразования, за $y''(\ell/2)$ следва:

$$\left. \frac{d^2y(x)}{dx^2} \right|_{x=\frac{\ell}{2}} = -\frac{\ell}{EJ} \varphi(k), \quad (27)$$

където:

$$\varphi(k) = \frac{k^2 + 5k + 8}{3k^2 + 32k + 64}$$

За гредата с кораво запънати краища ($k = 0$):

$$\varphi(0) = \frac{1}{8} \quad (28)$$

За ставно свързани краища ($k \rightarrow \infty$):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{k} + \frac{8}{k^2}}{3 + \frac{32}{k} + \frac{64}{k^2}} = \frac{1}{3} \quad (29)$$

Предвид (28) и (29), ако $v = const$, от (14) следва, че за гредата с кораво запънати краища коефициентът α намалява 2.67 пъти в сравнение със случая на ставно закрепване.

6. ИЗСЛЕДВАНЕ НА ДИНАМИЧНИЯ КОЕФИЦИЕНТ

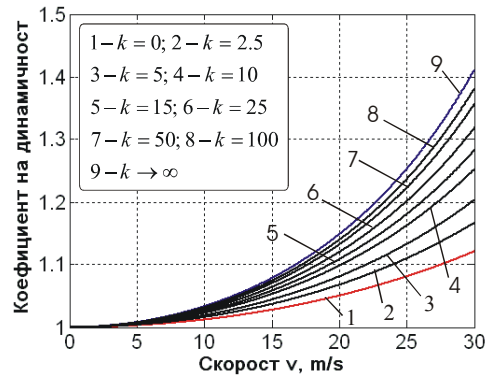
6.1. Товарът се движи с постоянна скорост

Изследването се извършва за положението на товара, когато същият е по средата на гредата. Като се вземе предвид (12) и (27), зависимост (14) получава вида:

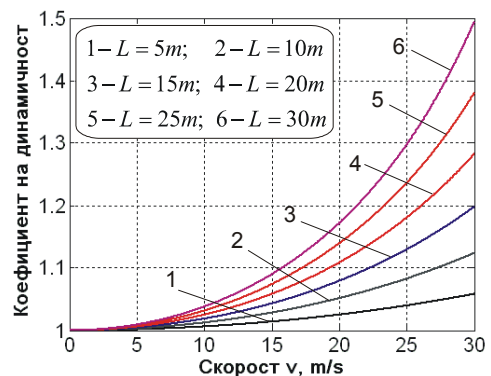
$$\alpha = \frac{(4Q + G_{red})v^2}{g} \frac{\ell}{EJ} \varphi(k), \quad (30)$$

а коефициентът на динамичност (13) е:

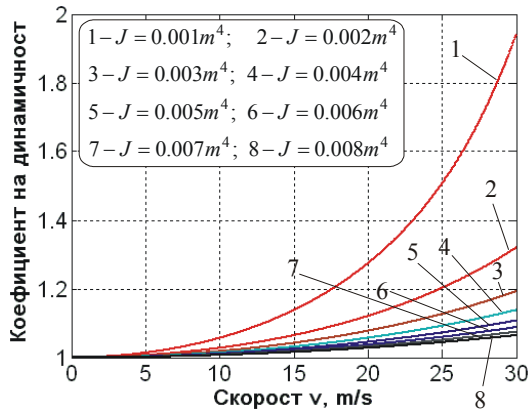
$$k_d = \frac{1}{1 - \frac{(4Q + G_{red})v^2}{g} \frac{\ell}{EJ} \varphi(k)}$$



Фиг. 5. Зависимост на коефициентът на динамичност от скоростта на товара за различна ъглова коравина: $E = 2 \times 10^{11} \text{ MPa}$, $J = 0.0022 \text{ m}^4$, $Q = 50 \text{ kN}$, $G = 20 \text{ kN}$, $\ell = 20 \text{ m}$



Фиг. 6. Зависимост на коефициентът на динамичност от скоростта на товара за различна дължина на гредата: $E = 2 \times 10^{11} \text{ MPa}$, $J = 0.0022 \text{ m}^4$, $Q = 50 \text{ kN}$, $G = 20 \text{ kN}$, $k = 15$



Фиг. 7. Зависимост на коефициента на динамичност от скоростта на товара за различна огъвна коравина на гредата: $E = 2 \times 10^{11} \text{ MPa}$, $\ell = 20 \text{ m}$, $Q = 50 \text{ kN}$, $G = 20 \text{ kN}$, $k = 15$

На фигури 5, 6 и 7 е показана зависимостта на коефициента на динамичност k_d от скоростта на товара. Очевидно, при големи скорости k_d нараства значително. Коравината на ъгловите еластични връзки влияе съществено върху k_d - например при $v = 30 \text{ m/s}$, k_d нараства с почти 25% при ставно закрепени краища в сравнение със случая на идеално запъване (фиг. 5). С увеличаване на дължината на гредата, при равни други условия, k_d нараства (фиг. 6), като тази тенденция е позначима при високи скорости. С намаляване на огъвната коравина на гредата, k_d се увеличава значително (фиг. 7). Неограниченото увеличаване на огъвната коравина посредством увеличаване на инерционния момент J довежда до $\alpha \rightarrow 0$ (виж (30), (29) и (17)), а от там до $k_d \rightarrow 1$ отъясно.

6.2. Влияние на ускорението върху коефициента на динамичност

Зависимост (14) може да се представи във вида:

$$\alpha = \alpha_v + \alpha_a,$$

където:

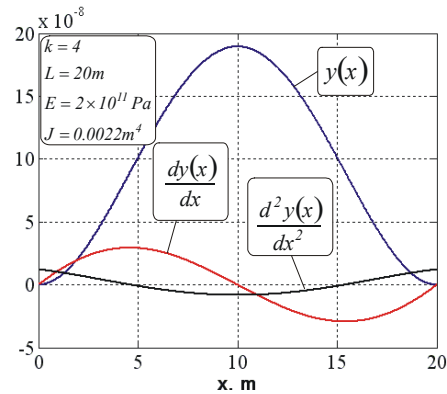
$$\alpha_v = - \frac{(4Q + G_{red})v^2}{g} \frac{d^2 y(x)}{dx^2}, \tag{31}$$

$$\alpha_a = - \frac{(Q + G_{red})a}{g} \frac{dy(x)}{dx}$$

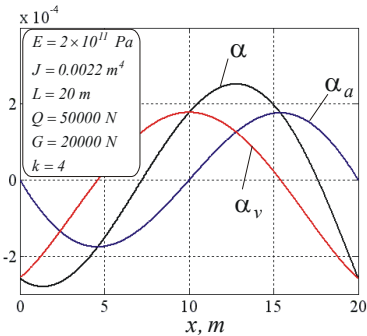
са компоненти, отчитащи влиянието съответно на скоростта и ускорението на товара върху коефициента на динамичност.

Както се вижда от фиг. 8, екстремумите на $\frac{dy(x)}{dx}$ и

$\frac{d^2 y(x)}{dx^2}$ са дефазирани: в сечението на симетрия, където провисването е най-голямо и компонентата α_v има екстремум, компонентата α_a приема стойност 0.

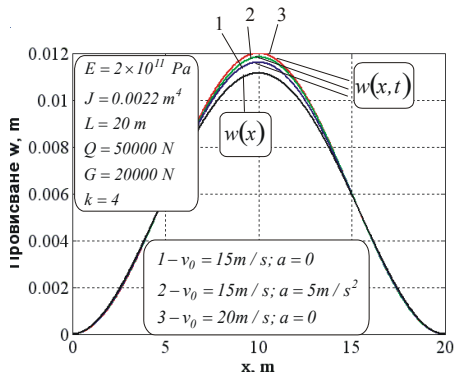


Фиг. 8. Провисване от единична сила под подвижния товар и производните му



Фиг. 9. Зависимост на α , α_v и α_a от x за единични стойности на скоростта и ускорението на товара

На фиг. 9 е показана зависимост на коефициента α и компонентите му α_v и α_a във функция от координата x , отчитаща положението на товара, за единични стойности на скоростта и ускорението ($a > 0$). Максималната стойност на α е изместена от сечението на симетрия по посока на нарастване на x и е при $x \approx \frac{5}{8} \ell$. Ако беше прието отрицателно ускорение, α_a си променя знака, а максималната стойност на α си остава същата, но е в сечение с абциса $x \approx \frac{3}{8} \ell$. Ускорението само по себе си влияе върху динамичния коефициент в същата степен, с каквато скоростта влияе. Само, че това влияние на ускорението не се отнася за сечението на симетрия на гредата, т. е. за застрашеното сечение. В зависимост от закона на движение на товара, теоретично е възможно да се окаже, че не сечението на симетрия на гредата е застрашено.



Фиг. 10. Сравнение между статично и динамично провисване за различни кинематични параметри на движение на товара

Практическо значение има случая, когато $a = const$, т. е.:

$$v = v_0 + at,$$

където v_0 е скоростта на товара за $x = 0$. Целесъобразна е трансформацията:

$$\int_0^v v dv = a \int_0^x dx,$$

откъдето:

$$v = \sqrt{2ax + v_0^2} \tag{32}$$

От (2), (7) и (8) за динамичното провисване следва:

$$w(x, t) = \frac{I}{1 - \alpha} (Q + G_{red}) y(x), \tag{33}$$

където компонентата α_v на α , зависимост (31), предвид (32), получава вида:

$$\alpha_v = - \frac{(4Q + G_{red})(2ax + v_0^2)}{g} \frac{d^2 y(x)}{dx^2}$$

На фиг. 10 е показано сравнение между статичното и динамичното провисване, зависимости (8) и (33), за различни кинематични параметри v_0 и a на движение на товара. Застрашено е сечението на симетрия на гредата, а динамичният ефект от движение на товара, спрямо статичното провисване, е под 10%.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработен е инженерен подход за определяне на динамичния ефект от преминаващ товар върху напрегнатото състояние на права, двуподпорна греда с наложени еластични ъглови връзки. Дефиниран е динамичен коефициент, като отношение на динамичното провисване към статичното такова. Извършено е обобщение на уравнението на R. Willis. За целта са въведени на обобщени гранични условия. Отчетени са инерционните сили от нормалното и кориолисово ускорение на товара, както и масата на гредата. Изследвано е влиянието на граничните условия и кинематичните характеристики на движещия се товар върху динамичния коефициент. Показано е, че при съвременни скорости, динамичният ефект е под 10%.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тимошенко С. П. Курс теорий упругости. „Наукова думка”, Киев, 1972.
- [2] Kien N. D., Ha L. T. Dynamic characteristics of elastically supported beam subjected to a compressive axial force and a moving load. Vietnam Journal of Mechanics 33(2) (2011) 113-131.
- [3] Changyong C., Mingliang L. Dynamic Analysis of Bernoulli-Euler Beam on Two-Parameter Subjected to Moving Harmonic Load. <http://www.paper.edu.cn>
- [4] Amiri S. N., Onyango M. Simply supported beam response on elastic foundation carrying repeated rolling concentrated loads. Journal of Engineering Science and Technology 5(1) (2010) 52 - 66
- [5] Awodola T. O. Variable velocity influence on the vibration of simply supported Bernoulli-Euler beam under exponentially varying magnitude moving load. Journal of Mathematics and Statistics 3(4) (2007) 228-232.
- [6] Zehsaz M., Sadeghi M. H., Asl A. Z. Dynamic Response of railway under a moving load. Journal of Applied Sciences 9(8) (2009) 1474-1481.
- [7] Sun L., Luo F. Study-state dynamic response of a Bernoulli-Euler beam on a viscoelastic foundation subjected to a platoon of moving dynamic load. Journal of Vibration and Acoustics 130 (2008) 051002-1 – 051002-19.
- [8] Karami-Khorramabadi M., Nezamabadi A. R. Dynamic analysis of infinite composite beam subjected to a moving load located on a viscoelastic foundation based on the third order shear deformation theory. Journal of Basic and Applied Scientific Research 2(8) (2012) 8378-8381.
- [9] Ding H., Chen L. Q., Yang S. P. Convergence of Galerkin truncation for dynamic response of finite beams on nonlinear foundations under a moving load. Journal of Sound and Vibration 331 (2012) 2426-2442.
- [10] Hryniewicz Z. Dynamics of Rayleigh beam on nonlinear foundation due to moving load using Adomian decomposition and coillet expansion. Soil Dynamics and Earthquake Engineering 31 (2011) 1123–1131.
- [11] Thambiratnam D., Zhuge Y. Dynamic analysis of beams on an elastic foundation subjected to moving loads. Journal of Sound and Vibration 198 (2) (1996) 149-169.
- [12] Yang Y. B., Yau J. D., Hsu L. C. Vibration of simples beams due to trains moving at high speeds. Engineering Structures 19(11) 91997) 936-944.
- [13] Idowu I. A., Gbolagade A. W., Olayiwola M. O. On the response of loaded beam subjected to moving masses and external forces. Report and Opinion 1(1) (2009) 68-78.
- [14] Omolofe B. Deflection profile analysis of beams on two-parameter elastic subgrade. Latin American Journal of Solids and Structures 10 (2013) 263-282.
- [15] Soares R. M., del Prado Z. J. G. N., Goncales P. B. Study of energy dissipation in beams subjected to moving loads, in: 10-a Conferencia Brasileira de Dinamica, Controle e Aplicacoes DINCON 2011, 28.08-01.09.2011, pp. 442-445.
- [16] Soares R. M., del Prado Z. J. G. N., Goncales P. B. On the vibration of beams using a moving absorber and subjected to moving loads. Mecanica Computacional 29 (2010) 1829-1840.
- [17] Nikkhoo A., Amankhani M. Dynamic behaviour of functionally graded beams transfersed by a moving random load. Indian Journal of Science and Technology 5(12) (2012) 3727-3731.
- [18] Firooz B. N., Mirzabeigy A. Vibration analysis of a beam with breathing crack under moving load effect, in: ENVMECH-07 - Recent Advances in Energy, Environment and Development ISBN: 978-1-61804-157-9 pp. 55-59.
- [19] Michaltos G. T. Dynamic behaviour of a single-span beam subjected to loads moving with variable speeds. Journal of Sound and Vibration 258(2) (2002) 359–372.
- [20] Lin Y. H., Trethewey M. W. Finite element analysis of elastic beams subjected to moving dynamic loads. Journal of Sound and Vibration 136 (2) (1990) 323-342.

- [21] Lin Y. H., Trethewey M. W. Active vibration suppression of beam structures subjected to moving loads: a feasibility study using finite elements. *Journal of Sound and Vibration* 166 (3) (1993) 383-395.
- [22] Zibdeh H. S., Rackwitz R. Response moments of an elastic beam subjected to Poissonian moving loads. *Journal of Sound and Vibration* 188 (4) (1995) 479-495.
- [23] Zibden H. S., Rackwitz R. Moving loads on beams with general boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration* 195 (1) (1996) 85-102.
- [24] Samani F., Pellicano F. Vibration reduction on beams subjected to moving loads using linear and nonlinear dynamic absorbers. *Journal of Sound and Vibration* 325 (2009) 742-754.
- [25] Wang H.P., Li J., Zhang K. Vibration analysis of the maglev guideway with the moving load. *Journal of Sound and Vibration* 305 (2007) 621-640
- [26] Michaltos G. T., Sophianopoulos D., Kounadis A. N. The effect of a moving mass and other parameters on the dynamic response of a simply supported beam. *Journal of Sound and Vibration* 191(3) (1996) 357-362.
- [27] Mamandi A., Kargarnovin M. H., Younesian D. Nonlinear vibrations of an inclined beam subjected to moving load, in: 7th International Conference on Modern Practice in Stress and Vibration Analysis, IOP Publishing: *Journal of Physics: Conference Series* 181 (2009) 012094 doi:10.1088/1742-6596/181/1/012094
- [28] Yau J. D. Vibration of simply supported compound beams to moving loads. *Journal of Marine Science and Technology* 12(4) (2004) 319-328.
- [29] Prager W., Save M. Minimum-weight design of beams subjected to fixed and moving loads. *Journal of Mechanics and Physics of Solids* 11 (1963) 255-267.
- [30] Zheng D. Y., Cheung Y. K., Au F. T. K., Cheng Y. S. Vibration of multi-span non-uniform beams under moving loads by using modified beam vibration functions. *Journal of Sound and Vibration* 212 (3) (1998) 455-467.
- [31] Mehri B., Davar A., Rahmani O. Dynamic Green function solution of beams under a moving load with different boundary conditions. *Journal of Sharif University of Technology, Transaction B: Mechanical Engineering* 16(3) (2009) 273-279.
- [32] Hilal M. A., Mohsen M. Vibration of beams with general boundary conditions due to a moving harmonic load. *Journal of Sound and Vibration* 232(4) (2000) 703-717
- [33] Xia H., Zhang N., Guo W. W. Analysis of resonance mechanism and conditions of train-bridge system. *Journal of Sound and Vibration* 297 (2006) 810-822.
- [34] Esmailzadeh E., Jalili N. Vehicle-passenger-structure interaction of uniform bridges traversed by moving vehicles. *Journal of Sound and Vibration* 260 (2003) 611-635.
- [35] Lou P. Comments on "Vehicle-passenger-structure interaction of uniform bridges traversed by moving vehicles". *Journal of Sound and Vibration* 294 (2006) 430-432.
- [36] Abu-Hilal M., Zibden H. S. Vibration analysis of beams with general boundary conditions traversed by a moving force. *Journal of Sound and Vibration* 229(2) (2000) 377-388.
- [37] Ye G., Jiang J. Dynamics of a prestressed Timoshenko beam subjected to arbitrary external load. *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A (Applied Physics & Engineering)* 11(11) (2010) 898-907
- [38] Azam E., Mofid M., Khoraskani R. A. Dynamic response of Timoshenko beam under moving mass. *Scientia Iranica, Transactions A: Civil Engineering* 2012 (article in press)