

**УСУКВАЩИ ТРЕПТЕНИЯ НА ВАЛ ВСЛЕДСТВИЕ НЕТОЧНОСТИ В
ПРЕДАВАТЕЛНИЯ МЕХАНИЗЪМ**

**TORSIONAL VIBRATIONS OF A SHAFT CAUSED BY IMPRECISIONS IN THE
TRANSMISSION**

Стефан Пулев*, Гергана Тонкова
МГУ „Св. Иван Рилски“ - София

Статията е постъпила на 10 май 2017 г.; приета за отпечатване на 01 юни 2017 г.

Abstract

This work investigates the influence of a possible defect in electric motors - eccentricity in the transmission between the rotating shaft and the motor. Kinematic disturbance is used to describe the imprecision. A mechano-mathematical model with two degrees of freedom is used. The differential equations describing the vibrations are derived with methods from analytical mechanics. The law of the torsional vibrations is derived analytically. Values are obtained for the periodically changing dynamic twisting moments of the shaft's sections. A numerical example is provided along with diagrams and amplitude-frequency response charts of the vibrations.

Keywords: torsional vibrations; shaft; kinematic disturbance; transmission.

ВЪВЕДЕНИЕ

Въпреки, че съвременните металорежещи машини са с цифрово-програмно управление и се отличават с изключителна прецизност, не са редки случаите на неточности в геометрията на детайлите от механизмите за предаване на въртливо движение. Неточностите се изразяват в несъосност, отклонения в размерите и формата, надхвърлящи или на границата на предвидените допуски. Причините за възникването им се коренят в технологиите за производство и монтаж. Макар и малки по размер, тези грешки могат да причинят вибрации и така допълнително да натоварят силово валовите, предаващи въртящ момент. В това изследване се изучават усукващите трептения на вал, причинени от несъосност (ексцентрицитет) между две шайби от предавките между електродвигателя и останалите ротиращи маси.

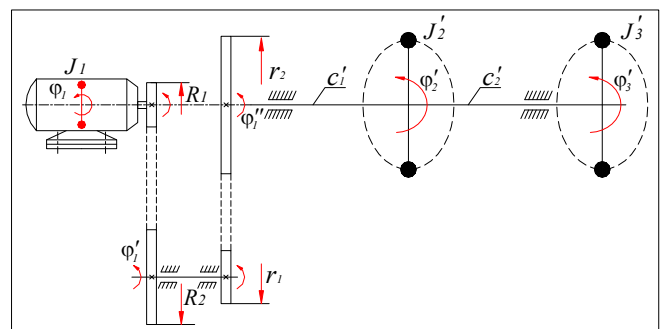
ИЗЛОЖЕНИЕ

Механо-математичен модел

Разглеждат се усукващите трептения, възникващи във вал с две съсредоточени ротиращи маси. Източник на ротационното движение е трифазен асинхронен електродвигател с мощност $P = 2,2 \text{ kW}$ и честота на въртене $n = 1420 \text{ min}^{-1}$. От електродвигателя движението се предава към вала посредством последователно разположени клино-ремъчна предавка (фиг. 1) с предавателно число $i_1 = \frac{\dot{\varphi}_1}{\dot{\varphi}_1'} = \frac{R_2}{R_1}$ и зъбно-ремъчна предавка с

предавателно число $i_2 = \frac{\dot{\varphi}_1'}{\dot{\varphi}_1''} = \frac{r_2}{r_1}$. Клино-ремъчната

предавка има предпазни функции по отношение на електродвигателя в случай на отказ на работната машина. А ролята на зъбно-ремъчната предавка е да редуцира ъгловата скорост, за да стане възможно предаването на по-голям въртящ момент. Общото предавателно число на двете предавки е $i = i_1 \cdot i_2$.

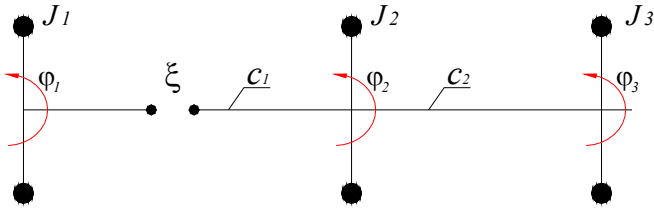


Фиг. 1. Реален динамичен модел за изследване на усукващите трептения на вал

За да се изследва поведението на елементите на механичната система е целесъобразно привеждането на всички инерционни и еластични характеристики, както и на ъглите на завъртане – към оста на ротора на електродвигателя. Така се получава приведената схема на вала (фиг. 2). Приведените параметри на системата са:

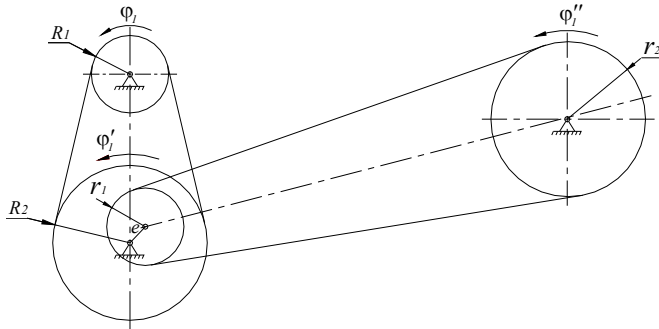
$$J_2 = \frac{J_2'}{i^2}; J_3 = \frac{J_3'}{i^2}; c_1 = \frac{c_1'}{i^2}; c_2 = \frac{c_2'}{i^2}; \varphi_1 = \varphi_1' \cdot i; \varphi_1 = \varphi_1'' \cdot i; \varphi_2 = \varphi_2' \cdot i; \varphi_3 = \varphi_3' \cdot i. \quad (1)$$

* Тел.: 02/8060332; e-mail: st_pulev@yahoo.com



Фиг. 2. Приведен динамичен модел

Източник на смущението в трептящата система е наличието на отместване (ексцентрицитет) между водимата шайба на клино-ремъчната и водещото зъбно колело на зъбно-ремъчната предавки (фиг. 3).



Фиг. 3. Схема за изясняване на ексцентрицитета в предавателния механизъм

Отместването е малко ($e < 1.10^{-3} m$) и не създава опасност за прекъсване на движението или приплъзване в зъбно-ремъчната предавка, но е причина за промяна в предавателното число на предавките между електродвигателя и вала. Наличието на e може да се моделира посредством променлив радиус (фиг. 4) на водещото колело на зъбно-ремъчната предавка:

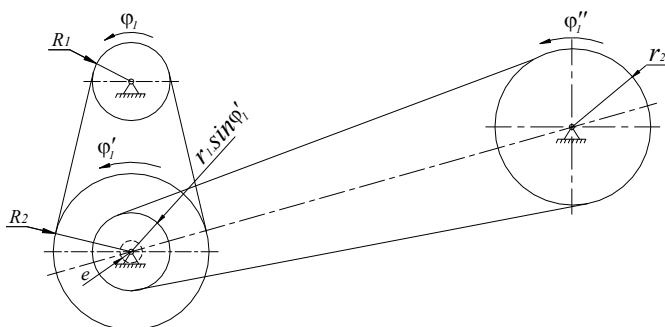
$$r_1 + e \sin \phi_1' \quad (2)$$

За предавателното число на привода в този случай се получава изразът:

$$\frac{\dot{\phi}_1}{\dot{\phi}_1''} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{r_2}{r_1 + e \sin \phi_1'} \Rightarrow \frac{\dot{\phi}_1''}{\dot{\phi}_1} = \frac{1}{i} \left(\frac{R_1 r_1}{R_2 r_2} + \frac{R_1 e}{R_2 r_2} \sin \phi_1' \right) \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\phi}_1''}{\dot{\phi}_1} = 1 + \frac{e}{r_1} \sin \phi_1'$$

Следователно е налице кинематично смущение във вида $\xi = \frac{e}{r_1} \sin \frac{\phi_1}{i}$.



Фиг. 4. Модел на предавателния механизъм с променлив радиус на водещото колело на зъбно-ремъчната предавка

При стационарен режим на работа на електродвигателя е налице постоянна ъглова скорост ω_1 и завъртанятия ϕ_i ($i=1,2,3$) могат да се представят като $\phi_i = \omega_1 t + q_i$ ($i=1,2,3$). Отклоненията q_1, q_2, q_3 на ротиращите маси от стационарното движение са вибрационни компоненти, които имат малки стойности и са обобщените координати. При тези обстоятелства изразът $\sin \frac{\phi_1}{i}$ може да се разложи в ред на Тейлор по степените на обобщената координата q_1 :

$$\sin \frac{\phi_1}{i} = \sin \left(\omega t + \frac{q_1}{i} \right) = \sin \omega t + \frac{q_1}{i} \cos \omega t - \frac{q_1^2}{2i^2} \sin \omega t + \dots \quad (4)$$

където $\omega = \frac{\omega_1}{i}$.

Кинематичното смущение ξ приема вида:

$$\xi = \frac{e}{r_1} \left(\sin \omega t + \frac{q_1}{i} \cos \omega t - \frac{q_1^2}{2i^2} \sin \omega t + \dots \right) \quad (5)$$

Поради малките стойности на e и q_1 е оправдано запазването само на първото събираемо в разложението и така за ξ остава формулата:

$$\xi = \frac{e}{r_1} \sin \omega t \quad (6)$$

Кинетичната и потенциалната енергия на механичната система са квадратни функции съответно на обобщените скорости и координати и имат следния вид:

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{q}_3^2, \quad (7)$$

$$P = \frac{1}{2} c_1 (q_2 - q_1 - \xi)^2 + \frac{1}{2} c_2 (q_3 - q_2)^2 \quad (8)$$

С методите на аналитичната механика [1, 2] са изведени следните диференциални уравнения за усукващите трептения на вала:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{q}_1 + c_1 (q_1 - q_2 - \xi) = 0, \\ J_2 \ddot{q}_2 - c_1 (q_1 - q_2 - \xi) + c_2 (q_2 - q_3) = 0, \\ J_3 \ddot{q}_3 - c_2 (q_2 - q_3) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

След кратко преобразуване и отчитане на (6) диференциалните уравнения (9) приемат окончателния си вид:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{q}_1 + c_1 q_1 - c_1 q_2 = \frac{c_1 e}{r_1} \sin \omega t, \\ J_2 \ddot{q}_2 - c_1 q_1 + (c_1 + c_2) q_2 - c_2 q_3 = -\frac{c_1 e}{r_1} \sin \omega t, \\ J_3 \ddot{q}_3 - c_2 q_2 + c_2 q_3 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Това е нехомогенна система диференциални уравнения от втори ред с постоянни коефициенти със следното честотно уравнение:

$$k^2 \left[k^4 - \left(\frac{c_1}{J_1} + \frac{c_1+c_2}{J_2} + \frac{c_2}{J_3} \right) k^2 + c_1 c_2 \frac{(J_1+J_2+J_3)}{J_1 J_2 J_3} \right] = 0 \quad (11)$$

Един от корените на честотното уравнение (k_3) е равен на нула, а другите два ($k_1^2; k_2^2$) са различни и положителни.

Поради загубите на енергия свободните трептения бързо затихват. Затова практическо значение имат чисто принудените трептения. За да се определи закона, по който те се извършват, се намира едно частно решение на системата (10) във вида:

$$q_i = B_i \sin \omega t, i = 1, 2, 3. \quad (12)$$

Тук B_i ($i=1,2,3$) са неизвестните амплитуди, а честотата ω съвпада с тази на смущението. След заместване на (12) в системата диференциални уравнения (10) и приравняване на коефициентите пред $\sin \omega t$ от двете страни на равенствата, се получава следната система алгебрични уравнения за определяне на амплитудите B_i ($i=1,2,3$):

$$\begin{cases} (c_1 - J_1 \omega^2) B_1 - c_1 B_2 = \frac{c_1 e}{r_1}, \\ -c_1 B_1 + (c_1 + c_2 - J_2 \omega^2) B_2 - c_2 B_3 = -\frac{c_1 e}{r_1}, \\ -c_2 B_2 + (c_2 - J_3 \omega^2) B_3 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Детерминантата Δ на (13) се получава от коефициентите пред неизвестните. При липса на резонанс ($\omega \neq \kappa_i, i=1,2,3$) тя е различна от 0 и има вида:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1 - J_1 \omega^2 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 - J_2 \omega^2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 - J_3 \omega^2 \end{vmatrix}. \quad (14)$$

След математично преобразуване за Δ се получава:

$$\Delta = \omega^2 \left[-J_1 J_2 J_3 \omega^4 + (c_1 J_1 J_3 + c_1 J_2 J_3 + c_2 J_1 J_3 + c_2 J_1 J_2) \omega^2 - c_1 c_2 (J_1 + J_2 + J_3) \right]. \quad (15)$$

Разложена на множители, Δ може да се представи и така:

$$\Delta = -J_1 J_2 J_3 \omega^2 (\omega^2 - \kappa_1^2) (\omega^2 - \kappa_2^2). \quad (16)$$

Детерминантите, съответстващи на отделните неизвестни, са:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{c_1 e}{r_1} & -c_1 & 0 \\ -\frac{c_1 e}{r_1} & c_1 + c_2 - J_2 \omega^2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 - J_3 \omega^2 \end{vmatrix} = \frac{c_1 e}{r_1} \omega^2 [J_2 J_3 \omega^2 - c_2 (J_2 + J_3)], \quad (17)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 - J_1 \omega^2 & \frac{c_1 e}{r_1} & 0 \\ -c_1 & -\frac{c_1 e}{r_1} & -c_2 \\ 0 & 0 & c_2 - J_3 \omega^2 \end{vmatrix} = \frac{c_1 e}{r_1} J_1 \omega^2 (c_2 - J_3 \omega^2), \quad (18)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} c_1 - J_1 \omega^2 & -c_1 & \frac{c_1 e}{r_1} \\ -c_1 & c_1 + c_2 - J_2 \omega^2 & -\frac{c_1 e}{r_1} \\ 0 & -c_2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{c_1 e}{r_1} J_1 c_2 \omega^2. \quad (19)$$

Решението на алгебричната система (13) е $B_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, (i=1,2,3)$.

От формули (12), при отчитане на резултатите за амплитудите, се достига до окончателния вид на закона за чисто принудените трептения:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{c_1 e [c_2 (J_2 + J_3) - J_2 J_3 \omega^2]}{J_1 J_2 J_3 r_1 (\omega^2 - \kappa_1^2) (\omega^2 - \kappa_2^2)} \sin \omega t, \\ q_2 &= \frac{c_1 e (J_3 \omega^2 - c_2)}{J_2 J_3 r_1 (\omega^2 - \kappa_1^2) (\omega^2 - \kappa_2^2)} \sin \omega t, \\ q_3 &= \frac{-c_1 c_2 e}{J_2 J_3 r_1 (\omega^2 - \kappa_1^2) (\omega^2 - \kappa_2^2)} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (20)$$

Анализът на формули (20) показва, че е възможно амплитудата на трептенията на първата обобщена координата да стане равна на нула. Ако бъде изпълнено условието:

$$\Delta_1 = 0 \Rightarrow B_1 = 0 \Rightarrow c_2 (J_2 + J_3) - J_2 J_3 \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{c_2 (J_2 + J_3)}{J_2 J_3}} \quad (21)$$

ротора на електродвигателя няма да се натоварва вибрационно. Възможно е и амплитудата на ротиращата маса с инерционен момент J_2 също да се нулира, ако е налице условието:

$$\Delta_2 = 0 \Rightarrow B_2 = 0 \Rightarrow J_3 \omega^2 - c_2 = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{c_2}{J_3}}. \quad (22)$$

Това означава, че по направление на втората обобщена координата няма да се извършват трептения. Условието (21) и (22) откриват възможности за решаване на различни оптимизационни задачи.

С помощта на изведения закон (20) на принудените трептения могат да се определят и динамичните усукващи моменти, натоварващи двата участъка на вала. Те се задават с изразите:

$$M_1 = c_1 (q_1 - q_2 - \xi) \text{ и } M_2 = c_2 (q_2 - q_3) \quad (23)$$

Числен пример

С цел да се приложат и анализират изведените по-горе зависимости е проведен числен експеримент при следните стойности на параметрите на трептящата система:

$$\begin{aligned} R_1 &= 35,5 \text{ mm} & \omega_1 &= 70,5 \text{ s}^{-1} \\ R_2 &= 75 \text{ mm} & \omega &= 33,41 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

$$r_1 = 40,4255 \text{ mm}$$

$$r_2 = 72,7655 \text{ mm}$$

$$i_1 = 2,11$$

$$i_2 = 1,80$$

$$i = i_1 i_2 = 3,798$$

$$e = 0,0007 \text{ m}$$

$$J_1 = 0,00503 \text{ kg.m}^2$$

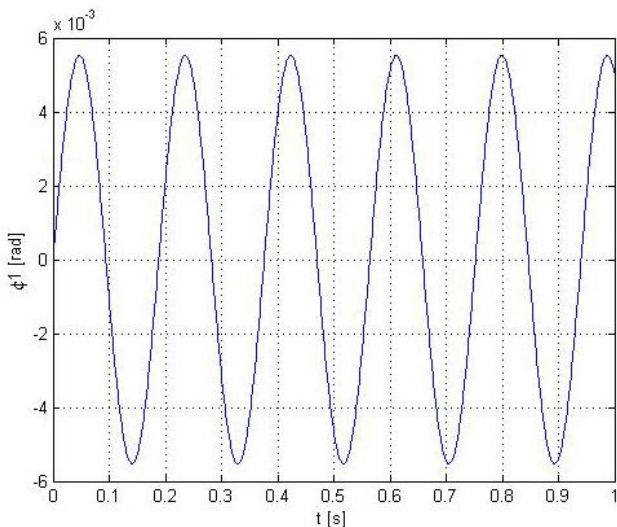
$$J_2 = 0,00113 \text{ kg.m}^2$$

$$J_3 = 0,00122 \text{ kg.m}^2$$

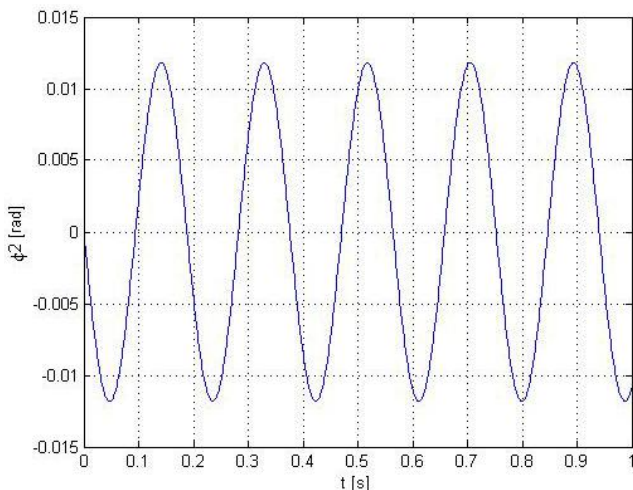
$$c_1 = 1248,2 \text{ N.m}$$

$$c_2 = 832,1 \text{ N.m}$$

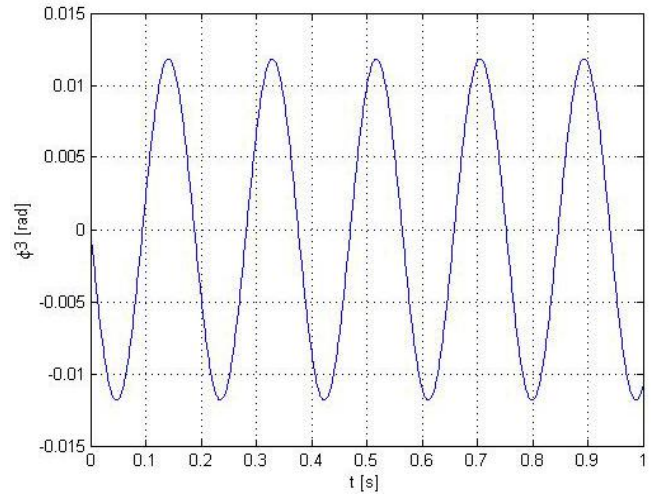
Численият пример е направен с програмата MATLAB и резултатите са визуализирани графично. Стойностите на собствените честоти са $k_1 = 695 \text{ s}^{-1}$ и $k_2 = 1512,6 \text{ s}^{-1}$. На фигури 5, 6 и 7 е представен закона на чисто принудените трептения съгласно (20). На фигури 8 и 9 е показано изменението на динамичните усукващи моменти в двата участъка на вала според формули (23). На фигури 10, 11 и 12 са приложени амплитудно-честотните характеристики на трептенията по трите обобщени координати. Съгласно (21) е пресметната $\omega = 1191 \text{ s}^{-1}$. Тази стойност се отчита и на фиг. 10, където амплитудата на q_1 се нулира. С използване на (22) се получава $\omega = 825,9 \text{ s}^{-1}$. На фиг. 11. се потвърждава твърдението, че при тази честота на смущението амплитудата на q_2 е нула.



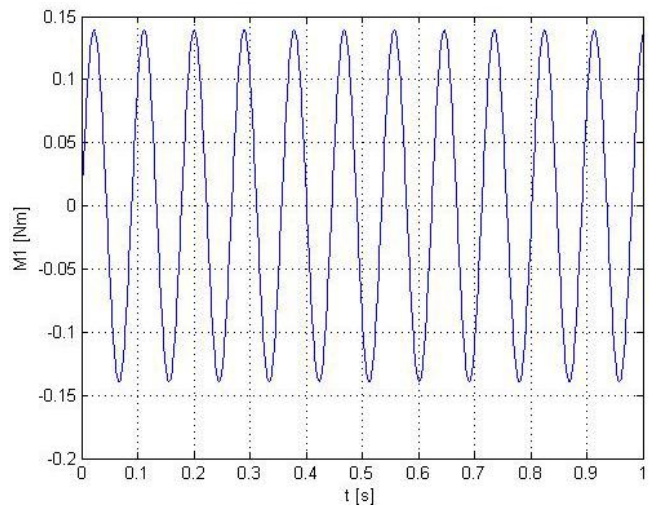
Фиг. 5. Закон на движението по първата обобщена координата



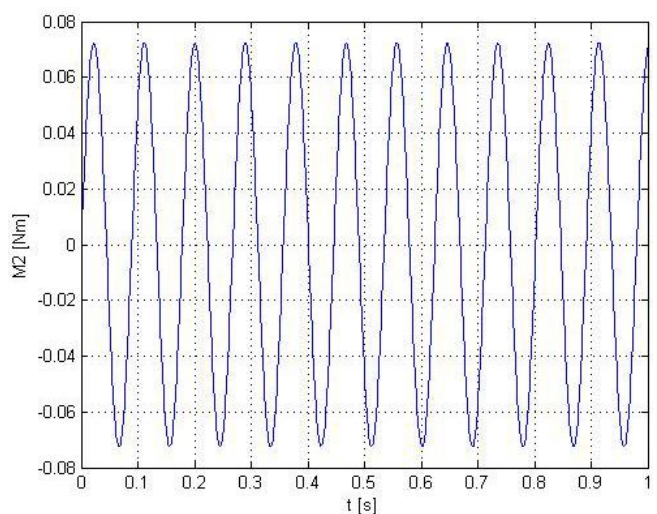
Фиг. 6. Закон на движението по втората обобщена координата



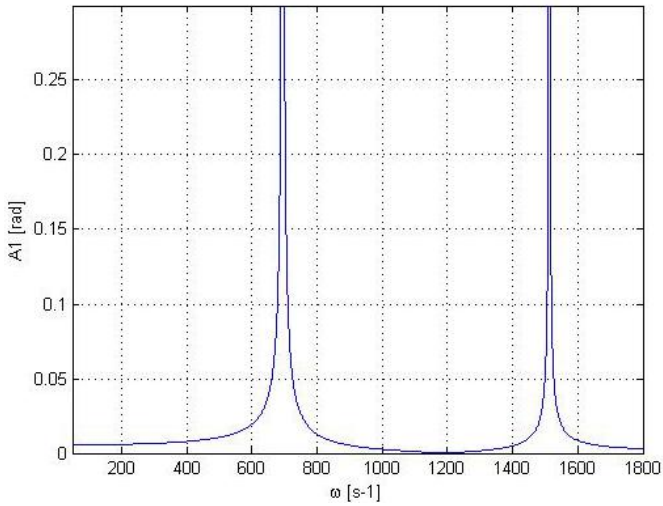
Фиг. 7. Закон на движението по третата обобщена координата



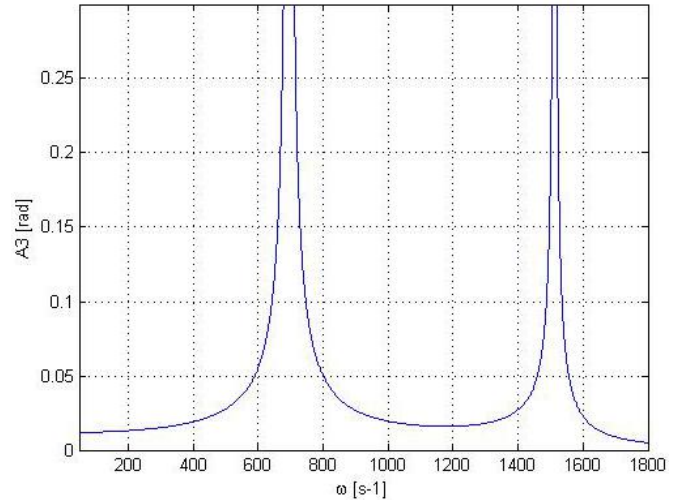
Фиг. 8. Изменение на динамичния момент в първи участък на вала



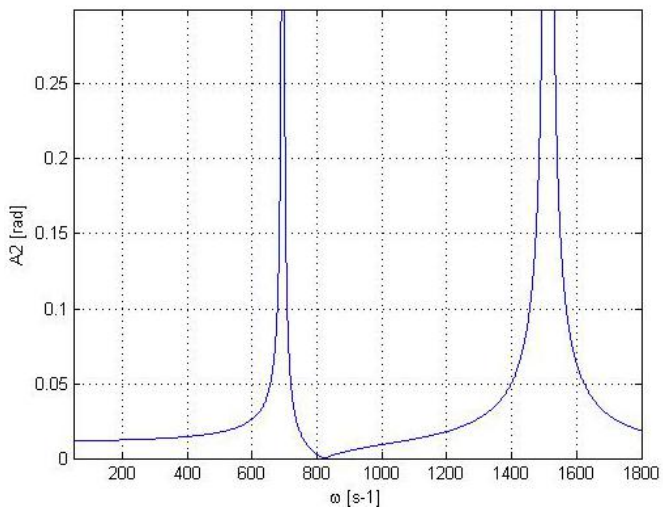
Фиг. 9. Изменение на динамичния момент във втори участък на вала



Фиг.10. Амплитудно-частотна характеристика за обобщената координата q_1



Фиг.12. Амплитудно-частотна характеристика за обобщената координата q_3



Фиг.11. Амплитудно-частотна характеристика за обобщената координата q_2

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Въпреки, че неточността в привода има малка стойност, тя е причина за вибрационно натоварване на вала. При това е възможно настъпването на резонанс и неконтролируемо нарастване на амплитудите на усукващите трептения. Ако обаче стойностите на параметрите удовлетворяват условия (21) и (22), вредните ефекти биха били сведени до минимум.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бабаков И. М. Теория колебаний- М.: Дрофа, 2004. - 591 с.
- [2] Писарев А. М., Парасков Цв. Н., Бъчваров Ст. Н. Курс по теоретична механика, част II – С. Техника, 1975. - 506 с.